Prof. Micu Elena

Lecția 5
Șiruri monotone
Analiză matematică – clasa a XI-a
Material teoretic

Material didactic.

Definiții

Fie $(x_n)_{n\geq n_0}$ un șir de numere reale ($n_0 \in \mathbb{N}$ este rangul primului termen). Șirul (x_n) este:

- **strict crescător** dacă $x_n < x_{n+1}$, $(\forall)\, n \geq n_0$, adică
$$x_{n_0} < x_{n_0+1} < x_{n_0+2} < \ldots;$$
- **crescător** dacă $x_n \leq x_{n+1}$, $(\forall)\, n \geq n_0$, adică
$$x_{n_0} \leq x_{n_0+1} \leq x_{n_0+2} \leq \ldots;$$
- **strict descrescător** dacă $x_n > x_{n+1}$, $(\forall)\, n \geq n_0$, adică
$$x_{n_0} > x_{n_0+1} > x_{n_0+2} > \ldots;$$
- **descrescător** dacă $x_n \geq x_{n+1}$, $(\forall)\, n \geq n_0$, adică
$$x_{n_0} \geq x_{n_0+1} \geq x_{n_0+2} \geq \ldots.$$

Un șir crescător sau descrescător se numește **monoton**. Un șir strict crescător sau strict descrescător se numește **strict monoton**. Un șir care nu este monoton se numește **nemonoton**.

Observații

1) Orice șir strict crescător este crescător, iar orice șir strict descrescător este descrescător. Un șir constant este și crescător, și descrescător.
2) Un șir crescător este minorat de primul său termen:
$$x_{n_0} \leq x_n, \quad (\forall)\, n \geq n_0.$$
Un șir descrescător este majorat de primul său termen:
$$x_n \leq x_{n_0}, \quad (\forall)\, n \geq n_0.$$
3) Șirul $(x_n)_{n\geq n_0}$ este nemonoton dacă există două diferențe $x_{k+1} - x_k$ și $x_{m+1} - x_m$ $(k, m \geq n_0)$ de semne contrare; de exemplu, dacă există trei termeni consecutivi cu
$$x_k < x_{k+1} > x_{k+2} \quad \text{sau} \quad x_k > x_{k+1} < x_{k+2}.$$
4) Un șir poate fi nemonoton, dar monoton începând de la un anumit rang $n_1 > n_0$; atunci spunem că șirul $(x_n)_{n\geq n_1}$ este monoton.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Criterii de monotonie

Criteriul diferenței. Se calculează $x_{n+1} - x_n$ și se stabilește semnul ei.

Dacă, pentru orice $n \geq n_0$,	atunci șirul (x_n) este
$x_{n+1} - x_n > 0$	strict crescător
$x_{n+1} - x_n \geq 0$	crescător
$x_{n+1} - x_n < 0$	strict descrescător
$x_{n+1} - x_n \leq 0$	descrescător

Criteriul raportului (numai pentru șiruri cu toți termenii pozitivi, $x_n > 0$, $(\forall)\, n \geq n_0$). Se calculează $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ și se compară cu 1.

Dacă, pentru orice $n \geq n_0$,	atunci șirul (x_n) este
$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} > 1$	strict crescător
$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$	crescător
$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$	strict descrescător
$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$	descrescător

Justificare. Dacă $x_n > 0$, înmulțind inegalitatea $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ cu x_n obținem $x_{n+1} > x_n$; analog pentru celelalte cazuri.

Metode de studiu a monotoniei

1) **Criteriul diferenței** – potrivit pentru fracții, sume, termeni care conțin $(-1)^n$.
2) **Criteriul raportului** – potrivit pentru termeni pozitivi care conțin puteri a^n, factoriale $n!$ sau produse.
3) **Compararea directă** a lui x_{n+1} cu x_n, folosind funcții monotone (de exemplu funcția radical este strict crescătoare).
4) **Inducția matematică**, pentru șiruri date prin relații de recurență; de regulă, se demonstrează mai întâi mărginirea, apoi monotonia.

Atenție

1) Criteriul raportului se aplică **numai** dacă toți termenii sunt pozitivi. Pentru termeni negativi, la înmulțirea cu $x_n < 0$ sensul inegalității se schimbă.
2) Nu este suficient să calculăm câțiva termeni: monotonia trebuie demonstrată pentru **orice** $n \geq n_0$. Calculul primilor termeni doar sugerează ce trebuie demonstrat.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0