Prof. Micu Elena

Lecția 6
Limita unui șir de numere reale
Analiză matematică – clasa a XI-a
Probleme rezolvate

Material didactic.

Exemplul 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)=2$**, cu definiția cu vecinătăți**

Fie $V\in\mathscr{V}(2)$ oarecare. Vecinătatea V conține un interval $(2-\varepsilon,2+\varepsilon)$, cu $\varepsilon>0$.
Pentru $n\geq 1$ avem $x_n-2=\frac{1}{n}>0$, deci $x_n\in(2-\varepsilon,2+\varepsilon)$ dacă $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Alegem

$$n_V=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1.$$

Din $[a]>a-1$ rezultă $n_V>\frac{1}{\varepsilon}$. Atunci, pentru $n\geq n_V$,

$$n>\frac{1}{\varepsilon}\ \Rightarrow\ \frac{1}{n}<\varepsilon\ \Rightarrow\ x_n\in(2-\varepsilon,2+\varepsilon)\subset V.$$

În afara lui V se află cel mult termenii $x_1,x_2,\ldots,x_{n_V-1}$, adică un număr finit. Deci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

Exemplul 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{n+2}=3$**, cu teorema cu** ε

Fie $\varepsilon>0$. Trebuie să găsim n_ε astfel încât $|x_n-3|<\varepsilon$, $(\forall)\,n\geq n_\varepsilon$. Calculăm

$$|x_n-3|=\left|\frac{3n+1-3(n+2)}{n+2}\right|=\left|\frac{-5}{n+2}\right|=\frac{5}{n+2}.$$

Majorăm convenabil: pentru $n\geq 1$, $n+2>n$, deci

$$|x_n-3|<\frac{5}{n}.$$

Alegem $n_\varepsilon=\left[\dfrac{5}{\varepsilon}\right]+1$; atunci $n_\varepsilon>\dfrac{5}{\varepsilon}$ și, pentru $n\geq n_\varepsilon$,

$$n>\frac{5}{\varepsilon}\ \Rightarrow\ \frac{5}{n}<\varepsilon\ \Rightarrow\ |x_n-3|<\varepsilon.$$

Conform teoremei, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{n+2}=3$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Exemplul 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n}\right)=0$

Fie $\varepsilon>0$. Amplificăm cu conjugata:

$$|x_n-0|=\sqrt{n+4}-\sqrt{n}=\frac{4}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}.$$

Pentru $n\geq 1$, $\sqrt{n+4}>\sqrt{n}$, deci numitorul este mai mare decât $2\sqrt{n}$ și

$$|x_n-0|<\frac{4}{2\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Alegem $n_\varepsilon=\left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]+1>\frac{4}{\varepsilon^2}$. Pentru $n\geq n_\varepsilon$:

$$n>\frac{4}{\varepsilon^2}\ \Rightarrow\ \sqrt{n}>\frac{2}{\varepsilon}\ \Rightarrow\ \frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon\ \Rightarrow\ |x_n-0|<\varepsilon.$$

Deci limita este 0.

Exemplul 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+2}{3^n}=1$

Fie $\varepsilon>0$. Avem

$$|x_n-1|=\frac{2}{3^n}.$$

Din binomul lui Newton, $3^n=(1+2)^n\geq 1+2n>n$, $(\forall)\,n\geq 1$, deci

$$|x_n-1|<\frac{2}{n},\quad (\forall)\,n\geq 1.$$

Alegem $n_\varepsilon=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1>\frac{2}{\varepsilon}$; pentru $n\geq n_\varepsilon$ avem $\frac{2}{n}<\varepsilon$, deci $|x_n-1|<\varepsilon$. Limita este 1.

Exemplul 5. Determinarea rangului

Pentru $x_n=\frac{2n+1}{n+3}$, $n\geq 0$, cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$, determinăm rangul de la care $|x_n-2|<\frac{1}{100}$.
Calculăm

$$|x_n-2|=\left|\frac{2n+1-2(n+3)}{n+3}\right|=\frac{5}{n+3}.$$

Ambii membri ai inegalității $\frac{5}{n+3}<\frac{1}{100}$ sunt pozitivi, iar numitorii sunt pozitivi; înmulțim cu $100(n+3)>0$, sensul inegalității se păstrează:

$$500<n+3\iff n>497.$$

Deci $|x_n-2|<\frac{1}{100}$ pentru orice $n\geq 498$; termenii $x_0,x_1,\ldots,x_{497}$ (498 de termeni) se află în afara vecinătății $\left(2-\frac{1}{100},2+\frac{1}{100}\right)$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Exemplul 6. $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-5)=+\infty$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty}(3-n^2)=-\infty$

a) Fie $\varepsilon>0$. Alegem $n_\varepsilon=\left[\dfrac{\varepsilon+5}{2}\right]+1>\dfrac{\varepsilon+5}{2}$. Pentru $n\geq n_\varepsilon$:

$$2n>\varepsilon+5\ \Rightarrow\ 2n-5>\varepsilon.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-5)=+\infty$.

b) Fie $\varepsilon>0$. Pentru $n\geq 1$, $n^2\geq n$, deci $3-n^2\leq 3-n$. Alegem $n_\varepsilon=[\varepsilon]+4>\varepsilon+3$. Pentru $n\geq n_\varepsilon$:

$$3-n^2\leq 3-n<3-(\varepsilon+3)=-\varepsilon.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}(3-n^2)=-\infty$.

Exemplul 7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-n^2}{n^2+1}=-1$

Fie $\varepsilon>0$. Calculăm

$$|x_n-(-1)|=\left|\frac{2-n^2+n^2+1}{n^2+1}\right|=\frac{3}{n^2+1}.$$

Pentru $n\geq 1$ avem $n^2+1>n^2\geq n$, deci

$$|x_n+1|<\frac{3}{n},\quad(\forall)\,n\geq 1.$$

Alegem $n_\varepsilon=\left[\dfrac{3}{\varepsilon}\right]+1>\dfrac{3}{\varepsilon}$; pentru $n\geq n_\varepsilon$ avem $\frac{3}{n}<\varepsilon$, deci $|x_n+1|<\varepsilon$. Limita este -1.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0