Prof. Micu Elena

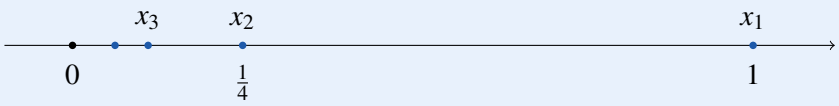
Lecția 6
Limita unui șir de numere reale
Analiză matematică – clasa a XI-a
Material teoretic

Material didactic.

1. Exemple introductive

Cum se comportă termenii unui șir când n crește?

1) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n \geq 1$: $1,\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{9},\ \dfrac{1}{16},\ \ldots$
Termenii sunt pozitivi și se apropie oricât de mult de 0, pe măsură ce n crește.



2) $y_n = -n^3$, $n \geq 0$: $0,\ -1,\ -8,\ -27,\ -64,\ \ldots$
Termenii scad și devin mai mici decât orice număr negativ dat.

3) $z_n = (-1)^n$, $n \geq 0$: $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$
Termenii iau alternativ valorile 1 și -1; nu se apropie de niciun număr.

Vom spune că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ și că șirul (z_n) nu are limită. Definiția de mai jos precizează aceste afirmații.

2. Definiția limitei unui șir

Definiție (cu vecinătăți)

Fie $(x_n)_{n\geq n_0}$ un șir de numere reale și $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Notăm cu $\mathscr{V}(l)$ mulțimea vecinătăților lui l. Spunem că șirul (x_n) **are limita** l dacă în afara oricărei vecinătăți a lui l se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului.
Echivalent: pentru orice $V \in \mathscr{V}(l)$ există un rang $n_V \geq n_0$ astfel încât

$$x_n \in V, \quad (\forall)\, n \geq n_V.$$

Se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ sau $x_n \to l$ (citim: „x_n tinde către l”).
Observație. Pentru $l \in \mathbb{R}$, orice vecinătate a lui l conține un interval $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, iar $x_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \iff |x_n - l| < \varepsilon$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

3. Teorema de caracterizare cu ε

Teoremă (limită finită)

Fie $(x_n)_{n\geq n_0}$ și $l \in \mathbb{R}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \geq n_0$ astfel încât

$$|x_n - l| < \varepsilon, \quad (\forall)\, n \geq n_\varepsilon.$$

Demonstrație. „$\Rightarrow$” Fie $\varepsilon > 0$. Intervalul $V = (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ este o vecinătate a lui l, deci în afara lui se află cel mult un număr finit de termeni. Alegem n_ε mai mare decât rangurile tuturor acestor termeni. Pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem $x_n \in V$, adică

$$l-\varepsilon < x_n < l+\varepsilon \iff -\varepsilon < x_n - l < \varepsilon \iff |x_n - l| < \varepsilon.$$

„$\Leftarrow$” Fie $V \in \mathscr{V}(l)$. Orice vecinătate a lui l conține un interval de forma $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$; fie un astfel de ε, cu $(l-\varepsilon, l+\varepsilon) \subset V$. Din ipoteză, pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_n - l| < \varepsilon$, adică $x_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \subset V$. Deci în afara lui V se află cel mult termenii de rang mai mic decât n_ε, un număr finit. □

Teoremă (limite infinite)

Fie $(x_n)_{n\geq n_0}$. Atunci:

- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \geq n_0$ astfel încât

$$x_n > \varepsilon, \quad (\forall)\, n \geq n_\varepsilon;$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \geq n_0$ astfel încât

$$x_n < -\varepsilon, \quad (\forall)\, n \geq n_\varepsilon.$$

Justificare (pentru $+\infty$). Orice $V \in \mathscr{V}(+\infty)$ conține un interval $(\alpha, +\infty)$; pentru $\varepsilon = \max(\alpha, 1) > 0$ avem $(\varepsilon, +\infty) \subset (\alpha, +\infty) \subset V$. Iar $(\varepsilon, +\infty)$ este o vecinătate a lui $+\infty$. Raționamentul este apoi același ca la teorema precedentă.

Atenție

1) Rangul n_ε depinde de ε: cu cât ε este mai mic, cu atât, de regulă, n_ε este mai mare.
2) Pentru a găsi n_ε nu este necesar cel mai mic rang posibil; este suficient **un** rang de la care inegalitatea are loc. De aceea se pot face majorări convenabile ale lui $|x_n - l|$.
3) Negația afirmației „$\lim x_n = l$” **nu** este „$\lim x_n \neq l$ pentru că termenii nu ajung la l”. Regulile de negație sunt prezentate în fișa separată *Reguli de negație*.

4. Revenim la exemplele introductive

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

Fie $\varepsilon > 0$. Căutăm n_ε astfel încât $|x_n - 0| < \varepsilon$, $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon$. Avem

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n^2}.$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Alegem $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$; atunci $n_\varepsilon > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Pentru $n \geq n_\varepsilon$, ambii membri fiind pozitivi,

$$n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^3) = -\infty$

Fie $\varepsilon > 0$. Căutăm n_ε astfel încât $y_n < -\varepsilon$, $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon$. Alegem

$$n_\varepsilon = \left[\sqrt[3]{\varepsilon}\right] + 1 > \sqrt[3]{\varepsilon}.$$

Pentru $n \geq n_\varepsilon$, funcția $t \mapsto t^3$ fiind strict crescătoare,

$$n > \sqrt[3]{\varepsilon} \Rightarrow n^3 > \varepsilon \Rightarrow -n^3 < -\varepsilon.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^3) = -\infty$.

3) Șirul $z_n = (-1)^n$, $n \geq 0$, nu are limită

Nu are limită finită. Fie $l \in \mathbb{R}$ oarecare. Negația teoremei cu ε (vezi fișa *Reguli de negație*) cere: există $\varepsilon > 0$ astfel încât, pentru orice rang $N \geq 0$, există $n \geq N$ cu $|z_n - l| \geq \varepsilon$. Luăm $\varepsilon = 1$. Din

$$2 = |1-(-1)| = |(1-l)+(l+1)| \leq |1-l| + |l+1|$$

rezultă că $|1-l| \geq 1$ sau $|-1-l| \geq 1$. În primul caz alegem $n \geq N$ par, în al doilea $n \geq N$ impar; în ambele cazuri $|z_n - l| \geq 1$. Deci l nu este limita șirului.
Nu are limita $\pm\infty$. Termenii sunt în $[-1,1]$; vecinătatea $(1,+\infty)$ a lui $+\infty$ nu conține niciun termen, iar $(-\infty,-1)$ a lui $-\infty$ la fel.
Așadar șirul este divergent și nu are limită.

5. Șiruri convergente și divergente

Șiruri convergente și divergente

- Un șir care are limita un număr real l se numește **convergent**.
- Un șir care nu este convergent se numește **divergent**. Un șir divergent fie are limita $+\infty$ sau $-\infty$, fie nu are limită.

Exemple de șiruri convergente.

1) $x_n = 5$, $(\forall)\, n \geq 0$ (șir constant): $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 5$.

2) $x_n = \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ (§4).

3) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$: termenii sunt alternativ negativi și pozitivi, dar se apropie de 0; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

4) $x_n = 2 + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ (Exemplul 1 din §6).

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Exemple de șiruri divergente.

1) $x_n = n$, $n \geq 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (limită infinită).

2) $y_n = -n^3$, $n \geq 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ (limită infinită, §4).

3) $z_n = (-1)^n$, $n \geq 0$: termenii $1, -1, 1, -1, \ldots$ nu se apropie de niciun număr; șirul nu are limită (§4).

4) $x_n = (-1)^n \cdot n$, $n \geq 0$: termenii $0, -1, 2, -3, 4, \ldots$ nu au limită (nici finită, nici $\pm\infty$).

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0