Prof. Micu Elena

Lecția 7
Proprietățile limitei unui șir de numere reale

Analiză matematică – clasa a XI-a

Probleme rezolvate

Material didactic.

Exemplul 1. Șirul $x_n = \cos\dfrac{n\pi}{3}$, $n \geq 0$, nu are limită

Alegem două subșiruri:

$$x_{6n} = \cos(2n\pi) = 1, \qquad x_{6n+3} = \cos(2n\pi + \pi) = \cos\pi = -1, \quad (\forall)\, n \geq 0.$$

Ambele sunt șiruri constante, deci

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} x_{6n+3} = -1.$$

Șirul are două subșiruri cu limite diferite; conform Observației 1, el nu are limită.

Exemplul 2. Șirul $x_n = (-1)^n \cdot n$, $n \geq 0$, nu are limită

Subșirul termenilor de rang par este $x_{2k} = 2k$, iar cel al termenilor de rang impar este $x_{2k+1} = -(2k+1)$, $(\forall)\, k \geq 0$.
Pentru orice $\varepsilon > 0$ și $k \geq \left[\frac{\varepsilon}{2}\right] + 1$ avem $2k > \varepsilon$, deci $x_{2k} \to +\infty$. Analog, $-(2k+1) < -2k < -\varepsilon$ pentru aceleași ranguri, deci $x_{2k+1} \to -\infty$.
Două subșiruri cu limite diferite: șirul nu are limită (Observația 1). Observăm că șirul nu este nici mărginit, deci este divergent și conform consecinței lui P5.

Exemplul 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$, cu subșiruri

Pentru $n \geq 1$ considerăm subșirurile de rang par și de rang impar:

$$x_{2k} = \frac{1}{2k}, \qquad x_{2k+1} = -\frac{1}{2k+1}.$$

Pentru primul: fie $\varepsilon > 0$ și $k_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right] + 1$; pentru $k \geq k_\varepsilon$ avem $2k > \dfrac{1}{\varepsilon}$, deci $\dfrac{1}{2k} < \varepsilon$. Așadar $x_{2k} \to 0$. Analog, $|x_{2k+1}| = \dfrac{1}{2k+1} < \dfrac{1}{2k}$, deci $x_{2k+1} \to 0$.
Cele două subșiruri au aceeași limită 0 și conțin împreună toți termenii șirului; conform Observației 3,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Exemplul 4. Subșirurile (x_{2n}), (x_{2n+1}), (x_{5n}) sunt convergente $\Rightarrow$ (x_n) este convergent

Notăm

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = l_1, \qquad \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = l_2, \qquad \lim_{n\to\infty} x_{5n} = l_3.$$

Subșirul (x_{10n}) este subșir atât al lui (x_{2n}) (deoarece $10n = 2\cdot 5n$), cât și al lui (x_{5n}) (deoarece $10n = 5\cdot 2n$). Conform P4 și P1,

$$l_1 = \lim_{n\to\infty} x_{10n} = l_3.$$

Subșirul (x_{10n+5}) este subșir al lui (x_{2n+1}) (deoarece $10n+5 = 2(5n+2)+1$) și al lui (x_{5n}) (deoarece $10n+5 = 5(2n+1)$). Deci

$$l_2 = \lim_{n\to\infty} x_{10n+5} = l_3.$$

Așadar $l_1 = l_2 = l_3 = l$. Subșirurile (x_{2n}) și (x_{2n+1}) au aceeași limită l și conțin toți termenii șirului; conform Observației 3, $x_n \to l$, deci (x_n) este convergent.

Exemplul 5. Aplicarea lui P2

Fie șirul

$$x_n = \begin{cases} 100, & 0 \le n \le 50, \\ \dfrac{1}{n}, & n \ge 51. \end{cases}$$

Șirul (x_n) diferă de șirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\ge 1}$ doar printr-un număr finit de termeni (cei de rang cel mult 50). Conform P2,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Exemplul 6. Aplicarea lui P5

a) Șirul $x_n = n^2 - n$, $n \ge 0$, este nemărginit: pentru $n \ge 1$, $n^2 - n = n(n-1) \ge n-1$, iar pentru orice $M > 0$, rangul $n = [M]+2$ verifică $x_n \ge n-1 > M$. Conform consecinței lui P5, șirul este divergent.

b) Șirul $y_n = 2 + (-1)^n$, $n \ge 0$, este mărginit ($1 \le y_n \le 3$), dar $y_{2n} = 3 \to 3$ și $y_{2n+1} = 1 \to 1$; deci este divergent. Mărginirea nu asigură convergența.

Exemplul 7. Aplicarea lui P6

Șirul $(x_n)_{n\ge 0}$ este convergent, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, și $x_n \ge 2$, $(\forall)\, n \ge 0$. Arătăm că $l \ge 2$.

Considerăm $y_n = x_n - 2 \ge 0$, $(\forall)\, n \ge 0$. Din

$$|y_n - (l-2)| = |x_n - l|$$

rezultă, cu teorema cu ε, că $y_n \to l-2$. Conform P6 a), $l-2 \ge 0$, adică $l \ge 2$.

Exemplul 8. Aplicarea lui P7

Șirul $x_n = \dfrac{n-20}{n+1}$, $n \ge 0$, are limita $1 > 0$. Conform P7, termenii sunt pozitivi de la un anumit rang. Efectiv: numitorul $n+1$ este pozitiv, iar numărătorul $n-20$ este pozitiv pentru $n \ge 21$. Deci

$$x_n > 0, \quad (\forall)\, n \ge 21,$$

iar $x_0, x_1, \ldots, x_{19}$ sunt negativi și $x_{20} = 0$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Exemplul 9. (x_n) **are limita** $l \iff (x_{n+p})$ **are limita** l**, pentru** $p \in \mathbb{N}$ **fixat**

„$\Rightarrow$” $(x_{n+p})_{n\geq n_0}$ este subșir al lui (x_n) ($k_n = n+p$ este strict crescător); se aplică P4.
„$\Leftarrow$” Fie $l \in \mathbb{R}$ și $\varepsilon > 0$. Din $x_{n+p} \to l$, există n'_ε astfel încât $|x_{m+p} - l| < \varepsilon$, $(\forall)\, m \geq n'_\varepsilon$. Luăm $n_\varepsilon = n'_\varepsilon + p$. Pentru $n \geq n_\varepsilon$, numărul $m = n - p$ verifică $m \geq n'_\varepsilon$, deci

$$|x_n - l| = |x_{m+p} - l| < \varepsilon.$$

Așadar $x_n \to l$. (Pentru $l = \pm\infty$ raționamentul este analog.)

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0