Prof. Micu Elena

Lecția 7
Proprietățile limitei unui șir de numere reale

Analiză matematică – clasa a XI-a

Material teoretic

Material didactic.

1. Proprietăți generale

În această lecție, $(x_n)_{n\geq n_0}$ este un șir de numere reale, iar limita l poate fi un număr real, $+\infty$ sau $-\infty$, dacă nu se precizează altfel.

P1. Unicitatea limitei

Dacă un șir are limită, atunci aceasta este unică.

Demonstrație (prin reducere la absurd). Presupunem că există $l_1 \neq l_2$ cu

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l_1 \quad \text{și} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = l_2.$$

Două puncte distincte au vecinătăți disjuncte: există $V_1 \in \mathscr{V}(l_1)$ și $V_2 \in \mathscr{V}(l_2)$ cu

$$V_1 \cap V_2 = \varnothing.$$

Din $x_n \to l_1$, există un rang $n_1 \geq n_0$ astfel încât $x_n \in V_1$, $(\forall) n \geq n_1$. Acești termeni, în număr infinit, nu sunt în V_2, deoarece $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Deci în afara lui V_2 se află o infinitate de termeni, adică $x_n \not\to l_2$. Contradicție. Așadar $l_1 = l_2$. □

P2. Adăugarea sau eliminarea unui număr finit de termeni

Dacă adăugăm sau eliminăm un număr finit de termeni ai unui șir, nu se modifică nici existența limitei, nici valoarea ei.

Justificare. Dacă $x_n \to l$, în afara oricărei vecinătăți V a lui l se află un număr finit de termeni. După adăugarea sau eliminarea unui număr finit de termeni, în afara lui V rămâne tot un număr finit de termeni.

Consecință. Dacă $x_n \to l$, atunci, pentru orice $p \in \mathbb{N}$ fixat,

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+p} = l.$$

P3. Schimbarea ordinii termenilor

Dacă schimbăm ordinea termenilor unui șir, nu se modifică nici existența limitei, nici valoarea ei.

Justificare. Faptul că un termen se află sau nu într-o vecinătate V depinde de valoarea lui, nu de rangul lui. Numărul termenilor din afara lui V rămâne același.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Șir constant

Dacă $x_n = c$, $(\forall)\, n \geq n_0$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c,$$

deoarece orice vecinătate a lui c conține toți termenii șirului. Limita unui șir constant este egală cu valoarea constantă.

2. Subșiruri

Definiție

Fie $(x_n)_{n\geq n_0}$ un șir și $(k_n)_{n\geq 0}$ un șir **strict crescător** de numere naturale, cu $k_0 \geq n_0$. Șirul

$$(x_{k_n})_{n\geq 0}: \quad x_{k_0},\ x_{k_1},\ x_{k_2},\ \ldots$$

se numește **subșir** al șirului (x_n).

Exemple. Pentru un șir $(x_n)_{n\geq 0}$:

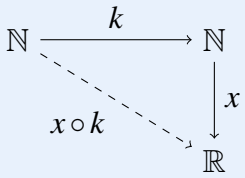
- $k_n = 2n$: $(x_{2n})_{n\geq 0}$: $x_0, x_2, x_4, \ldots$ – subșirul termenilor de rang par;
- $k_n = 2n+1$: $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$: $x_1, x_3, x_5, \ldots$ – subșirul termenilor de rang impar;
- $k_n = 3n$: $(x_{3n})_{n\geq 0}$: $x_0, x_3, x_6, \ldots$;
- $k_n = n+p$, $p \in \mathbb{N}$ fixat: $(x_{n+p})_{n\geq 0}$: $x_p, x_{p+1}, \ldots$ – se obține eliminând primii p termeni.
- $k_n = 2^n$: $(x_{2^n})_{n\geq 0}$: $x_1, x_2, x_4, x_8, \ldots$;
- $k_n = n^2$: $(x_{n^2})_{n\geq 0}$: $x_0, x_1, x_4, x_9, \ldots$

Orice șir este subșir al său ($k_n = n$). Un subșir se mai numește **șir extras** din șirul (x_n).

Subșirul ca o compunere de funcții

Un șir $(x_n)_{n\geq 0}$ este o funcție $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x(n) = x_n$. Dacă $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k(n) = k_n$, este o funcție strict crescătoare, atunci subșirul (x_{k_n}) este compunerea $x \circ k$:

$$(x \circ k)(n) = x\big(k(n)\big) = x_{k_n}.$$



Atenție

Șirul $x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots$ **nu** este subșir al lui (x_n): rangurile $0, 0, 1, 1, 2, 2, \ldots$ nu formează un șir strict crescător. La fel, $x_2, x_1, x_4, x_3, \ldots$ nu este subșir (termenii nu sunt luați în ordinea rangurilor).

Lemă

Dacă $(k_n)_{n\geq 0}$ este un șir strict crescător de numere naturale, atunci

$$k_n \geq n, \quad (\forall)\, n \geq 0.$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Demonstrație (prin inducție). $P(0)$: $k_0 \geq 0$, adevărat, deoarece $k_0 \in \mathbb{N}$.
Presupunem $k_n \geq n$. Șirul (k_n) este strict crescător, deci $k_{n+1} > k_n \geq n$. Cum k_{n+1} și n sunt numere naturale, din $k_{n+1} > n$ rezultă

$$k_{n+1} \geq n+1.$$

Conform principiului inducției matematice, $k_n \geq n$, $(\forall)\, n \geq 0$. □

P4. Limita unui subșir

Dacă șirul (x_n) are limita l, atunci orice subșir (x_{k_n}) al său are aceeași limită l.

Demonstrație. Fie $V \in \mathscr{V}(l)$. Din $x_n \to l$, există un rang n_V astfel încât $x_m \in V$, $(\forall)\, m \geq n_V$. Pentru $n \geq n_V$, conform lemei,

$$k_n \geq n \geq n_V,$$

deci $x_{k_n} \in V$. Așadar $x_{k_n} \in V$, $(\forall)\, n \geq n_V$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = l$. □

Observații (consecințe ale lui P4)

1) Dacă un șir conține două subșiruri cu limite diferite, atunci șirul **nu are limită**.
2) Dacă un șir conține un subșir care nu are limită, atunci șirul **nu are limită**.
3) Dacă un șir conține două (sau mai multe) subșiruri cu aceeași limită l, iar aceste subșiruri conțin împreună **toți** termenii șirului, atunci șirul are limita l.
   Justificare pentru (x_{2n}) *și* (x_{2n+1}). Fie $V \in \mathscr{V}(l)$. În afara lui V se află un număr finit de termeni de rang par și un număr finit de termeni de rang impar, deci un număr finit de termeni ai șirului.

Atenție

În Observația 3, subșirurile trebuie să conțină **toți** termenii șirului. De exemplu, pentru $x_n = (-1)^n$, $n \geq 0$, subșirurile (x_{4n}) și (x_{6n}) au amândouă limita 1, dar șirul nu are limită: termenii de rang impar nu apar în niciunul dintre ele.

3. Proprietăți legate de mărginire și semn

P5. Orice șir convergent este mărginit

Demonstrație. Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$. Aplicăm teorema cu ε pentru $\varepsilon = 1$: există $n_1 \geq n_0$ astfel încât

$$|x_n - l| < 1 \iff l-1 < x_n < l+1, \quad (\forall)\, n \geq n_1.$$

Termenii $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots, x_{n_1-1}$ sunt în număr finit. Notăm

$$\alpha = \min\{x_{n_0}, \ldots, x_{n_1-1}, l-1\}, \qquad \beta = \max\{x_{n_0}, \ldots, x_{n_1-1}, l+1\}.$$

Atunci $\alpha \leq x_n \leq \beta$, $(\forall)\, n \geq n_0$, deci șirul este mărginit. □

Consecință. Un șir nemărginit este divergent.

Reciproca este falsă. Șirul $x_n = (-1)^n$, $n \geq 0$, este mărginit ($-1 \leq x_n \leq 1$), dar nu are limită: $x_{2n} = 1 \to 1$, iar $x_{2n+1} = -1 \to -1$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

P6. Trecerea la limită în inegalități cu 0

a) Dacă $x_n \geq 0$, $(\forall)\, n \geq n_0$, și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$, atunci $l \geq 0$.
b) Dacă $x_n \leq 0$, $(\forall)\, n \geq n_0$, și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$, atunci $l \leq 0$.

Demonstrație a) (prin reducere la absurd). Presupunem $l < 0$. Alegem $\varepsilon = -\dfrac{l}{2} > 0$; atunci $l + \varepsilon = \dfrac{l}{2} < 0$. Din teorema cu ε, există $n_\varepsilon \geq n_0$ astfel încât, pentru $n \geq n_\varepsilon$,

$$|x_n - l| < \varepsilon \iff l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon,$$

deci

$$x_n < l + \varepsilon = \frac{l}{2} < 0,$$

în contradicție cu $x_n \geq 0$. Așadar $l \geq 0$. □

Observații

1) Chiar dacă $x_n > 0$, $(\forall)\, n \geq n_0$, limita poate fi 0; se obține doar $l \geq 0$. Exemplu: $x_n = \dfrac{1}{n} > 0$, $(\forall)\, n \geq 1$, dar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2) Proprietatea rămâne adevărată dacă $x_n \geq 0$ doar de la un anumit rang (conform P2).

P7. Păstrarea semnului limitei

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l > 0$, atunci există un rang $n_1 \geq n_0$ astfel încât

$$x_n > 0, \quad (\forall)\, n \geq n_1.$$

Demonstrație. Alegem $\varepsilon = \dfrac{l}{2} > 0$. Există $n_1 \geq n_0$ astfel încât $|x_n - l| < \dfrac{l}{2}$, $(\forall)\, n \geq n_1$, deci

$$x_n > l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} > 0.$$

Analog: dacă $l < 0$, atunci $x_n < 0$ de la un anumit rang. □

P8. O variantă a teoremei cu ε

Fie $l \in \mathbb{R}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ dacă și numai dacă există $M > 0$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \geq n_0$ cu

$$|x_n - l| < \varepsilon M, \quad (\forall)\, n \geq n_\varepsilon.$$

Demonstrație. „⇒” Se ia $M = 1$.
„⇐” Fie $\varepsilon > 0$. Aplicăm ipoteza pentru numărul pozitiv $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{M}$: există n_{ε_1} astfel încât, pentru $n \geq n_{\varepsilon_1}$,

$$|x_n - l| < \varepsilon_1 M = \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

Deci $x_n \to l$. □
Utilitate. În exerciții putem obține $|x_n - l| < 3\varepsilon$ sau $|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ etc., fără să mai ajustăm rangul.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Teorema lui Bolzano – Weierstrass

Din orice șir mărginit se poate extrage un subșir convergent.

Exemplu. Șirul $x_n = (-1)^n$, $n \geq 0$, este mărginit și nu are limită, dar subșirul (x_{2n}), cu toți termenii egali cu 1, este convergent. Teorema se admite fără demonstrație.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0