Prof. Micu Elena

Lecția 8
Șiruri cu limita $+\infty$
Analiză matematică – clasa a XI-a

Material didactic.

1. Definiție și teorema de caracterizare

În această lecție, $(x_n)_{n\geq n_0}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ fixat, este un șir de numere reale. O vecinătate a lui $+\infty$ este orice mulțime care conține un interval de forma $(\varepsilon, +\infty)$, cu $\varepsilon > 0$.

Definiție

Șirul $(x_n)_{n\geq n_0}$ are **limita** $+\infty$ dacă orice vecinătate a lui $+\infty$ conține toți termenii șirului, cu excepția unui număr finit dintre ei. Scriem

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \qquad \text{sau} \qquad x_n \to +\infty.$$

Echivalent: în afara oricărei vecinătăți a lui $+\infty$ se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului.

Teorema de caracterizare cu ε

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff (\forall)\,\varepsilon > 0,\ (\exists)\,n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ n_\varepsilon \geq n_0,\ \text{astfel încât } x_n > \varepsilon,\ (\forall)\,n \geq n_\varepsilon.$$

Demonstrație. „$\Rightarrow$” Fie $\varepsilon > 0$. Intervalul $V = (\varepsilon, +\infty)$ este o vecinătate a lui $+\infty$, deci în afara lui se află un număr finit de termeni: $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_p}$. Luăm

$$n_\varepsilon = \max\{n_0, n_1, n_2, \ldots, n_p\} + 1.$$

Pentru $n \geq n_\varepsilon$, termenul x_n nu este printre cei din afara lui V, deci $x_n \in V$, adică $x_n > \varepsilon$.
„$\Leftarrow$” Fie V o vecinătate a lui $+\infty$; ea conține un interval $(\varepsilon, +\infty)$, $\varepsilon > 0$. Conform ipotezei, $x_n > \varepsilon$ pentru $n \geq n_\varepsilon$, deci în afara lui V pot rămâne doar termenii $x_{n_0}, \ldots, x_{n_\varepsilon - 1}$, în număr finit. □

Atenție

Rangul n_ε depinde de ε: cu cât ε este mai mare, cu atât, de regulă, trebuie să „așteptăm” mai mult până când termenii depășesc pe ε. Un șir cu limita $+\infty$ este **divergent** (nu are limită finită) și este **nemărginit superior**.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

2. Criterii pentru limita $+\infty$

Criteriul majorării (la $+\infty$)

Dacă $x_n \geq y_n$, $(\forall)\, n \geq n_0$, și $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$. Din $y_n \to +\infty$, există $n_\varepsilon \geq n_0$ astfel încât $y_n > \varepsilon$, $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon$. Atunci

$$x_n \geq y_n > \varepsilon, \quad (\forall)\, n \geq n_\varepsilon,$$

deci $x_n \to +\infty$. □

Pe scurt: un șir „mai mare" decât un șir care tinde la $+\infty$ tinde și el la $+\infty$. Inegalitatea poate avea loc doar de la un anumit rang (conform proprietății de adăugare/eliminare a unui număr finit de termeni).

Propoziție (șiruri monotone)

Dacă $(x_n)_{n\geq n_0}$ este **crescător** și **nemărginit**, atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

Demonstrație. Un șir crescător este mărginit inferior de primul său termen: $x_n \geq x_{n_0}$. Fiind nemărginit, el este deci nemărginit superior: pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang n_ε cu $x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$. Din monotonie,

$$x_n \geq x_{n_\varepsilon} > \varepsilon, \quad (\forall)\, n \geq n_\varepsilon,$$

deci $x_n \to +\infty$. □

Reformulare. Orice șir monoton crescător și nemărginit superior are limita $+\infty$.

Observație

Monotonia este esențială. Șirul $x_n = \big(1+(-1)^n\big)n$, $n \geq 0$, este nemărginit superior ($x_{2k} = 4k$), dar nu are limita $+\infty$: toți termenii de rang impar sunt egali cu 0, deci în afara vecinătății $(1, +\infty)$ se află o infinitate de termeni.

3. Două limite fundamentale

Rezultatul 1. $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty,\ \alpha > 0$

Fie $x_n = n^\alpha$, $n \geq 1$, $\alpha > 0$.
(1) Monotonia. Termenii sunt pozitivi și

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha > 1, \quad (\forall)\, n \geq 1,$$

deoarece $\frac{n+1}{n} > 1$ și $\alpha > 0$. Deci (x_n) este strict crescător.
(2) Nemărginirea (prin reducere la absurd). Presupunem că există $M > 0$ astfel încât $n^\alpha \leq M$, $(\forall)\, n \geq 1$. Ridicând la puterea $\frac{1}{\alpha} > 0$, obținem

$$n \leq M^{1/\alpha}, \quad (\forall)\, n \geq 1,$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

fals pentru $n = \left[M^{1/\alpha}\right] + 1$. Deci șirul este nemărginit.
Din (1) și (2), conform propoziției,

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} = +\infty.$$

Cazuri particulare: $\lim n = +\infty$, $\lim n^2 = +\infty$, $\lim \sqrt{n} = +\infty$, $\lim \sqrt[3]{n} = +\infty$.

Inegalitatea lui Bernoulli

Dacă $a > -1$, atunci

$$(1+a)^n \geq 1 + na, \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Rezultatul 2. $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty,\ a > 1$

Scriem $a = 1 + b$, cu $b = a - 1 > 0$. Din inegalitatea lui Bernoulli,

$$a^n = (1+b)^n \geq 1 + nb > nb, \quad (\forall)\, n \geq 1.$$

Cum $\lim_{n\to\infty}(nb) = +\infty$ (pentru $\varepsilon > 0$, $nb > \varepsilon \iff n > \frac{\varepsilon}{b}$), conform criteriului majorării,

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty.$$

4. Probleme rezolvate

Problema 1. Cu teorema de caracterizare: $\lim_{n\to\infty}(4n-7) = +\infty$

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Avem

$$x_n > \varepsilon \iff 4n - 7 > \varepsilon \iff n > \frac{\varepsilon + 7}{4}.$$

Luăm

$$n_\varepsilon = \left[\frac{\varepsilon+7}{4}\right] + 1 \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem $n > \frac{\varepsilon+7}{4}$, deci $x_n > \varepsilon$. Așadar $(\forall)\,\varepsilon > 0$, $(\exists)\, n_\varepsilon$ cu $x_n > \varepsilon$, $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon$, adică $\lim_{n\to\infty}(4n-7) = +\infty$.
Exemplu numeric: pentru $\varepsilon = 1000$, $n_\varepsilon = \left[\frac{1007}{4}\right] + 1 = 252$; într-adevăr, $x_{252} = 1001 > 1000$.

Problema 2. Cu teorema de caracterizare: $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$

Fie $\varepsilon > 0$. Cum $n \geq 0$,

$$n^2 > \varepsilon \iff n > \sqrt{\varepsilon}.$$

Luăm $n_\varepsilon = \left[\sqrt{\varepsilon}\right] + 1$. Pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem $n > \sqrt{\varepsilon}$, deci $n^2 > \varepsilon$. Rezultă

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty.$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Problema 3. Criteriul majorării: $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+5)=+\infty$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3+2n^2+4)=+\infty$

a) Avem

$$n^2+5\geq n^2,\quad (\forall)\, n\geq 0,\qquad \lim_{n\to\infty} n^2=+\infty.$$

Conform criteriului majorării, $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+5)=+\infty$.

b) Avem

$$n^3+2n^2+4\geq n^3,\quad (\forall)\, n\geq 0,\qquad \lim_{n\to\infty} n^3=+\infty,$$

deci, conform criteriului majorării, $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3+2n^2+4)=+\infty$.

Problema 4. $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n=+\infty$ **(trei metode)**

Metoda I (monotonie și nemărginire). Fie $x_n=4^n$, $n\geq 1$. Termenii sunt pozitivi și

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{4^{n+1}}{4^n}=4>1,$$

deci (x_n) este strict crescător. Presupunem, prin reducere la absurd, că există $M>0$ cu $4^n\leq M$, $(\forall)\, n\geq 1$. Logaritmând în baza 4, obținem $n\leq \log_4 M$, $(\forall)\, n\geq 1$, fals pentru $n=\left[\log_4 M\right]+1$ (dacă $M\leq 1$, inegalitatea $4^n\leq M$ este falsă deja pentru $n=1$). Deci șirul este crescător și nemărginit, prin urmare $4^n\to+\infty$.

Metoda II (inegalitatea lui Bernoulli).

$$4^n=(1+3)^n\geq 1+3n>3n,\quad (\forall)\, n\geq 1,$$

iar $\lim\limits_{n\to\infty} 3n=+\infty$. Din criteriul majorării, $4^n\to+\infty$.

Metoda III (binomul lui Newton). Toți termenii dezvoltării sunt pozitivi, deci

$$4^n=(1+3)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k=1+C_n^1\cdot 3+C_n^2\cdot 3^2+\cdots+C_n^n\cdot 3^n\geq 1+3n>n,\quad (\forall)\, n\geq 1,$$

și din criteriul majorării rezultă din nou $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n=+\infty$.

Problema 5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+5}=+\infty$

Avem

$$\sqrt{n+5}>\sqrt{n},\quad (\forall)\, n\geq 0,\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty\ \ (\text{Rezultatul 1, } \alpha=\tfrac{1}{2}).$$

Conform criteriului majorării, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+5}=+\infty$.

Problema 6. $x_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n\geq 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$

Monotonia. Avem

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}>0,$$

deci șirul este strict crescător. Nemărginirea este însă greu de arătat direct, de aceea folosim criteriul majorării.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Fiecare dintre cei n termeni ai sumei este cel puțin egal cu ultimul: $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, pentru $1 \leq k \leq n$.
Deci

$$x_n \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ termeni}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}, \quad (\forall)\, n \geq 1.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$, din criteriul majorării rezultă

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

Problema 7. $x_n = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n} \left(k^2+k+1\right)}{n!}$, $n \geq 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$,

$$k^2+k+1 \geq 3k \iff k^2-2k+1 \geq 0 \iff (k-1)^2 \geq 0, \text{ adevărat.}$$

Înmulțind membru cu membru aceste n inegalități între numere pozitive, obținem

$$\prod_{k=1}^{n} \left(k^2+k+1\right) \geq (3\cdot 1)(3\cdot 2)\cdots(3\cdot n) = 3^n \cdot n!.$$

Împărțim prin $n! > 0$:

$$x_n \geq 3^n, \quad (\forall)\, n \geq 1.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = +\infty$ (Rezultatul 2, $a = 3 > 1$), din criteriul majorării rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Problema 8. $\lim\limits_{n\to\infty} \log_2 n = +\infty$

Fie $\varepsilon > 0$. Funcția $\log_2$ este strict crescătoare, deci

$$\log_2 n > \varepsilon \iff n > 2^{\varepsilon}.$$

Luăm $n_\varepsilon = \left[2^{\varepsilon}\right] + 1$; pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem $\log_2 n > \varepsilon$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \log_2 n = +\infty$.
Analog: $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a n = +\infty$, pentru orice $a > 1$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

5. Probleme propuse

1) Folosind teorema de caracterizare cu ε, arătați că:
a) $\lim\limits_{n\to\infty}(5n+2)=+\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}(3n-10)=+\infty$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$.

2) Pentru șirul $x_n=2n+9$, $n\geq 0$, determinați cel mai mic rang de la care toți termenii sunt mai mari decât 1000.

3) Folosind teorema de caracterizare, arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}n^3=+\infty$.

4) Folosind criteriul majorării, arătați că:
a) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+3n+1)=+\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^4+n+7)=+\infty$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+4}=+\infty$.

5) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\sin n\right)=+\infty$.

6) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n+(-1)^n\right)=+\infty$.

7) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n+1}=+\infty$. *Indicație:* comparați cu $n-1$.

8) Arătați, în două moduri, că $\lim\limits_{n\to\infty}5^n=+\infty$.

9) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n=+\infty$.

10) Arătați că șirul $x_n=1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $n\geq 1$, are limita $+\infty$.

11) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{n!}=+\infty$.

12) Arătați că șirul $x_n=1+2+3+\cdots+n$, $n\geq 1$, are limita $+\infty$.

13) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}\log_3(n+1)=+\infty$.

14) Dați exemplu de un șir nemărginit superior care nu are limita $+\infty$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0