Prof. Micu Elena

Lecția 9
Șiruri cu limita $-\infty$
Analiză matematică – clasa a XI-a

Material didactic.

1. Definiție și teorema de caracterizare

Fie $(x_n)_{n\geq n_0}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ fixat, un șir de numere reale. O vecinătate a lui $-\infty$ este orice mulțime care conține un interval de forma $(-\infty, -\varepsilon)$, cu $\varepsilon > 0$.

Definiție

Șirul $(x_n)_{n\geq n_0}$ are **limita** $-\infty$ dacă orice vecinătate a lui $-\infty$ conține toți termenii șirului, cu excepția unui număr finit dintre ei. Scriem

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \qquad \text{sau} \qquad x_n \to -\infty.$$

Teorema de caracterizare cu ε

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff (\forall)\, \varepsilon > 0,\ (\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ n_\varepsilon \geq n_0,\ \text{astfel încât } x_n < -\varepsilon,\ (\forall)\, n \geq n_\varepsilon.$$

Demonstrația este analogă celei de la limita $+\infty$, folosind vecinătățile $(-\infty, -\varepsilon)$.

Legătura dintre limitele $-\infty$ și $+\infty$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff \lim_{n\to\infty} (-x_n) = +\infty.$$

Justificare. Pentru $\varepsilon > 0$,

$$x_n < -\varepsilon \iff -x_n > \varepsilon,$$

deci condițiile din cele două teoreme de caracterizare coincid, cu același rang n_ε. □

Consecință. Toate rezultatele de la limita $+\infty$ se transferă la limita $-\infty$ prin schimbarea semnului.

Atenție

Un șir cu limita $-\infty$ este divergent și **nemărginit inferior**. Termenii lui devin, de la un rang încolo, mai mici decât orice număr negativ fixat.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

2. Criterii pentru limita $-\infty$

Criteriul majorării (la $-\infty$)

Dacă $x_n \le y_n$, $(\forall)\, n \ge n_0$, și $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$. Din $y_n \to -\infty$, există $n_\varepsilon \ge n_0$ cu $y_n < -\varepsilon$, $(\forall)\, n \ge n_\varepsilon$. Atunci

$$x_n \le y_n < -\varepsilon, \quad (\forall)\, n \ge n_\varepsilon,$$

deci $x_n \to -\infty$. □

Pe scurt: un șir „mai mic" decât un șir care tinde la $-\infty$ tinde și el la $-\infty$.

Propoziție (șiruri monotone)

Dacă $(x_n)_{n\ge n_0}$ este **descrescător** și **nemărginit inferior**, atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$. Șirul fiind nemărginit inferior, există un rang n_ε cu $x_{n_\varepsilon} < -\varepsilon$. Din monotonie,

$$x_n \le x_{n_\varepsilon} < -\varepsilon, \quad (\forall)\, n \ge n_\varepsilon.$$ □

3. Probleme rezolvate

Problema 1. Cu teorema de caracterizare: $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^3) = -\infty$

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Avem

$$-n^3 < -\varepsilon \iff n^3 > \varepsilon \iff n > \sqrt[3]{\varepsilon}.$$

Luăm $n_\varepsilon = \left[\sqrt[3]{\varepsilon}\right] + 1$. Pentru $n \ge n_\varepsilon$ avem $n > \sqrt[3]{\varepsilon}$, deci $-n^3 < -\varepsilon$. Așadar

$$\lim_{n\to\infty}(-n^3) = -\infty.$$

Problema 2. Cu teorema de caracterizare: $\lim\limits_{n\to\infty}(8-3n) = -\infty$

Fie $\varepsilon > 0$. Avem

$$8 - 3n < -\varepsilon \iff 3n > 8 + \varepsilon \iff n > \frac{8+\varepsilon}{3}.$$

Pentru $n \ge n_\varepsilon = \left[\dfrac{8+\varepsilon}{3}\right] + 1$ avem $8 - 3n < -\varepsilon$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}(8-3n) = -\infty$.

Exemplu numeric: pentru $\varepsilon = 100$, $n_\varepsilon = 37$; într-adevăr, $x_{37} = -103 < -100$, iar $x_{36} = -100$ nu verifică inegalitatea strictă.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Problema 3. Limite obținute prin schimbarea semnului

Folosim legătura $x_n \to -\infty \iff -x_n \to +\infty$ și rezultatele din Lecția 8.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty$, $\alpha > 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} (-n^\alpha) = -\infty$. De exemplu:

$$\lim_{n\to\infty} (-n^4) = -\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(-\sqrt[3]{n}\right) = -\infty.$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$, $a > 1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} (-a^n) = -\infty$. De exemplu, $\lim\limits_{n\to\infty} (-2^n) = -\infty$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a n = +\infty$, $a > 1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} (-\log_a n) = -\infty$.

d) Pentru $a \in (0,1)$, $\log_a n = -\log_{1/a} n$, cu $\frac{1}{a} > 1$, deci

$$\lim_{n\to\infty} \log_{1/2} n = -\infty.$$

Problema 4. Criteriul majorării: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-n^2 - 4n - 3\right) = -\infty$

Pentru $n \geq 0$ avem $4n + 3 \geq 0$, deci

$$-n^2 - 4n - 3 \leq -n^2, \quad (\forall)\, n \geq 0, \qquad \lim_{n\to\infty} (-n^2) = -\infty.$$

Conform criteriului majorării la $-\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-n^2 - 4n - 3\right) = -\infty$.

Problema 5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n - n^2\right) = -\infty$

Pentru $n \geq 2$ avem $n^2 \geq 2n$, deci

$$n - n^2 \leq n - 2n = -n, \quad (\forall)\, n \geq 2.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} (-n) = -\infty$, din criteriul majorării rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} (n - n^2) = -\infty$.

Problema 6. $\lim\limits_{n\to\infty} (\cos n - 3n) = -\infty$

Deoarece $\cos n \leq 1$,

$$\cos n - 3n \leq 1 - 3n, \quad (\forall)\, n \geq 0.$$

Șirul $1 - 3n$ are limita $-\infty$ (se arată ca în Problema 2), deci, conform criteriului majorării, $\lim\limits_{n\to\infty} (\cos n - 3n) = -\infty$.

Problema 7. Șirul $x_n = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$

Notăm $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Șirul (s_n) este strict crescător, deoarece $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1} > 0$. Pentru nemărginire grupăm termenii, pentru $n = 2^m$:

$$s_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right) \geq 1 + \frac{m}{2},$$

deoarece termenul $\frac{1}{2}$ și fiecare dintre cele $m - 1$ paranteze sunt cel puțin $\frac{1}{2}$ (paranteza a j-a are 2^{j-1} termeni, fiecare cel puțin $\frac{1}{2^j}$). Așadar (s_n) este crescător și nemărginit (pentru orice M, luăm

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

$m > 2M$ și $n = 2^m$), deci $s_n \to +\infty$. Rezultă

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(-s_n) = -\infty.$$

Observație. Șirul (x_n) este descrescător și nemărginit inferior — se aplică și propoziția din secțiunea 2.

4. Probleme propuse

1) Folosind teorema de caracterizare cu ε, arătați că:
a) $\lim\limits_{n\to\infty}(2-5n) = -\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^2) = -\infty$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}(-\sqrt{n}) = -\infty$.

2) Pentru șirul $x_n = 10 - 4n$, $n \geq 0$, determinați cel mai mic rang de la care toți termenii sunt mai mici decât -500.

3) Folosind criteriul majorării, arătați că:
a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n^3 - n - 6\right) = -\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n - n^2\right) = -\infty$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin n - n) = -\infty$.

4) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}(-3^n) = -\infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \left(\frac{5}{4}\right)^n\right) = -\infty$.

5) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} \log_{1/3} n = -\infty$.

6) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-n^2}{n+1} = -\infty$.

7) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\sqrt{n^2+1}\right) = -\infty$.

8) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n} - n) = -\infty$. *Indicație:* pentru $n \geq 4$, $\sqrt{n} \leq \frac{n}{2}$.

9) Arătați că șirul $x_n = -\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $n \geq 1$, are limita $-\infty$.

10) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)}{n!}\right) = -\infty$.

11) Dați exemplu de un șir nemărginit inferior care nu are limita $-\infty$.

12) Arătați că șirul $x_n = (-2)^n$, $n \geq 0$, nu are limita $-\infty$ și nici limita $+\infty$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0