Prof. Micu Elena
Micu Elena

Măsura unui unghi. Unghiuri congruente

Clasa a V-a

Material de studiu

1. Ce măsurăm la un unghi?

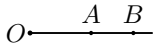
Și unghiurile se măsoară! Ceea ce măsurăm la un unghi este **„deschiderea"** dintre cele două semidrepte care îl formează. Lungimea laturilor nu are nicio importanță: laturile sunt semidrepte, deci se întind nelimitat. Un unghi desenat cu laturi care par scurte și același unghi desenat cu laturi care par lungi au aceeași măsură (semidreptele nu au lungime).

Pentru a măsura unghiurile, se alege ca unitate de măsură un anumit unghi, numit **unghiul de un grad**, notat $1°$ (citim „un grad"). Gradul este stabilit astfel încât unghiul alungit să aibă $180°$. Un unghi nul are măsura $0°$.

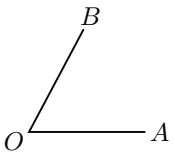
Definiție

Un unghi care nu este nici nul, nici alungit se numește **unghi propriu**. Măsura unui unghi propriu $\sphericalangle AOB$ este cuprinsă strict între $0°$ și $180°$:

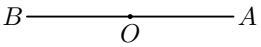
$$0° < m(\sphericalangle AOB) < 180°.$$



unghi nul: $m(\sphericalangle AOB) = 0°$



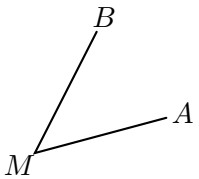
unghi propriu: $0° < m(\sphericalangle AOB) < 180°$



unghi alungit: $m(\sphericalangle AOB) = 180°$

Unghiurile ascuțite, unghiurile drepte și unghiurile obtuze sunt unghiuri proprii. Laturile unui unghi propriu nu sunt situate pe aceeași dreaptă, de aceea doar un unghi propriu are interior și exterior.

Notație



Măsura unghiului $\sphericalangle AMB$ se notează $m(\sphericalangle AMB)$ și se citește „măsura unghiului AMB". Dacă unghiul are $48°$, scriem $m(\sphericalangle AMB) = 48°$. Dacă măsura nu este cunoscută, putem scrie $m(\sphericalangle AMB) = x°$.

Pentru măsurători mai precise, gradul se împarte în 60 de minute, iar minutul în 60 de secunde:

$$1° = 60', \qquad 1' = 60''.$$

Scriem, de exemplu, $m(\sphericalangle xOy) = 63°17'28''$ și citim: „măsura unghiului xOy este egală cu 63 de grade, 17 minute și 28 de secunde".

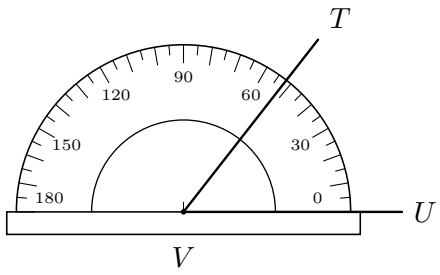
Observație. Nu orice unghi are ca măsură un număr întreg de grade, minute și secunde. Măsurătorile pe care le facem cu instrumentele sunt, de aceea, **aproximative**.

Din istoria matematicii

- Împărțirea cercului în 360 de părți egale provine de la astronomii din **Babilonul antic**, care foloseau un sistem de numerație în baza 60 și observau că Soarele pare să parcurgă cerul, în cursul unui an, în aproximativ 360 de zile.
- Astronomul grec **Claudius Ptolemeu** (secolul al II-lea) a folosit sistematic împărțirea gradului în 60 de părți și a fiecărei părți, din nou, în 60 de părți. Denumirile pe care le folosim astăzi provin din latină: *gradus* = treaptă, *pars minuta prima* = prima parte mică (de aici *minut*), *pars minuta secunda* = a doua parte mică (de aici *secundă*).
- Aceleași denumiri, minut și secundă, le folosim și pentru măsurarea timpului: și ora se împarte în 60 de minute, iar minutul în 60 de secunde.

2. Măsurarea unui unghi cu raportorul

Instrumentul cu care măsurăm unghiurile se numește **raportor**. El are o margine în formă de semicerc, gradată de la 0° la 180°, și un punct marcat, numit **centrul raportorului**.



Exemplu. Măsurăm unghiul $\sphericalangle TVU$.

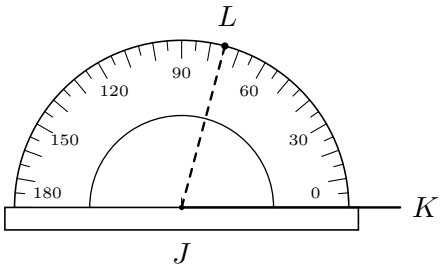
Pasul 1. Așezăm centrul raportorului în vârful V.

Pasul 2. Rotim raportorul până când latura $[VU$ trece prin diviziunea 0°.

Pasul 3. Citim, pe gradație, numărul aflat în dreptul laturii $[VT$: 52.
Scriem $m(\sphericalangle TVU) = 52°$.

Atenție! Raportorul are, de obicei, două gradații (una de la stânga la dreapta, alta de la dreapta la stânga). Citim întotdeauna pe gradația care începe cu 0° pe latura de la care am pornit.

3. Construirea unui unghi cu măsura dată



Exemplu. Construim un unghi $\sphericalangle KJL$ cu măsura de 75°.

Pasul 1. Desenăm o semidreaptă $[JK$.

Pasul 2. Așezăm centrul raportorului în J, cu diviziunea 0° pe $[JK$.

Pasul 3. Marcăm cu creionul un punct L în dreptul diviziunii 75°.

Pasul 4. Îndepărtăm raportorul și trasăm cu rigla semidreapta $[JL$.

Am obținut unghiul $\sphericalangle KJL$ cu $m(\sphericalangle KJL) = 75°$. Și această construcție este aproximativă. Putem desena segmente oricât de lungi, dar nu putem desena unghiuri cu măsura mai mare de 180°.

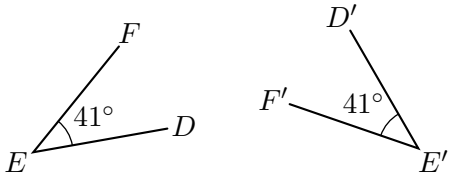
4. Unghiurile în viața de zi cu zi

- **Ceasul.** Într-o oră, acul minutar face un tur complet, adică parcurge 360°; într-un minut, el parcurge $360° : 60 = 6°$. Acul orar parcurge într-o oră $360° : 12 = 30°$. La ora 2 fix, unghiul dintre ace are $2 \cdot 30° = 60°$.
- **Busola și navigația.** Pilotul unui avion sau căpitanul unei nave indică direcția de deplasare prin unghiul (în grade) pe care îl face aceasta cu direcția nord.
- **Construcții.** Înclinarea unui acoperiș, a unei rampe pentru cărucioare sau a unei scări se exprimă prin unghiul pe care îl face cu orizontala. Rampele pentru persoanele cu dizabilități se construiesc cu o înclinare mică, de câteva grade.
- **Sport.** La aruncarea mingii la coș sau la săritura în lungime, distanța atinsă depinde de unghiul sub care pornește mingea sau sportivul.

5. Unghiuri congruente

Definiție

Două unghiuri care au măsuri egale se numesc **unghiuri congruente**.



În figură, $m(\sphericalangle DEF) = m(\sphericalangle D'E'F') = 41°$, deci unghiurile $\sphericalangle DEF$ și $\sphericalangle D'E'F'$ sunt congruente. Scriem

$$\sphericalangle DEF \equiv \sphericalangle D'E'F'$$

și citim: „unghiul DEF este congruent cu unghiul $D'E'F'$".

Dacă două unghiuri $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$ nu au măsuri egale, $m(\sphericalangle A) \neq m(\sphericalangle B)$, ele se numesc **unghiuri necongruente** și scriem $\sphericalangle A \not\equiv \sphericalangle B$.

Compararea unghiurilor. Comparând măsurile, aflăm care unghi este mai mare: dacă $m(\sphericalangle A) > m(\sphericalangle B)$, spunem că unghiul A este mai mare decât unghiul B și scriem $\sphericalangle A > \sphericalangle B$.

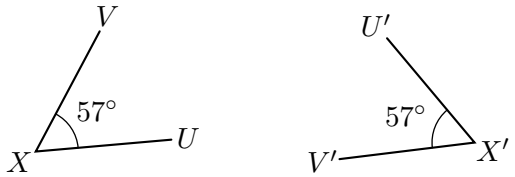
Observații.

- Toate unghiurile nule sunt congruente între ele (au 0°); toate unghiurile drepte sunt congruente între ele (au 90°); toate unghiurile alungite sunt congruente între ele (au 180°).
- Orice unghi este congruent cu el însuși: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A$.
- Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$, atunci și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle A$.
- Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, atunci $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ (unghiurile au toate aceeași măsură).
- Măsura oricărui unghi este mai mare sau egală cu 0° și mai mică sau egală cu 180°: $0° \leq m(\sphericalangle AOB) \leq 180°$.

6. Marcarea unghiurilor congruente pe figură

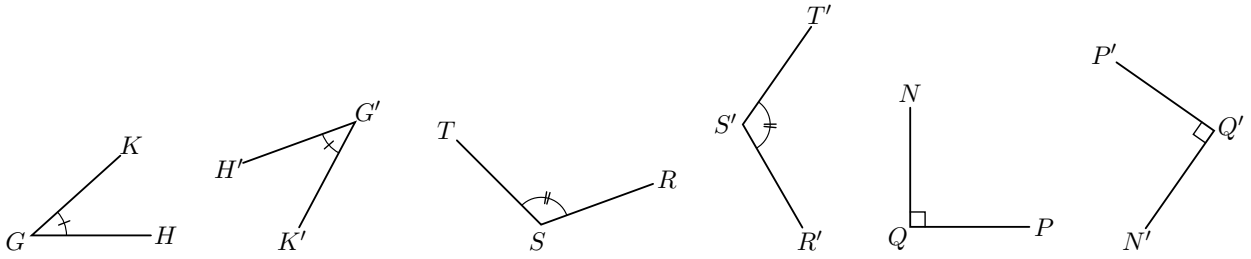
Ca și în cazul segmentelor congruente, pe un desen indicăm prin semne convenționale că două sau mai multe unghiuri sunt congruente. Se folosesc mai multe procedee.

a) Scrierea măsurii comune. În interiorul fiecărui unghi scriem măsura lui. Unghiurile care au scrisă aceeași măsură sunt congruente.



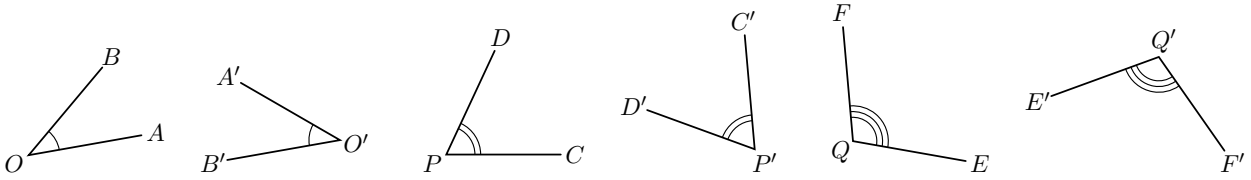
$$\sphericalangle UXV \equiv \sphericalangle U'X'V'$$

b) Același număr de liniuțe pe arcul de unghi. Desenăm în fiecare unghi un arc de cerc cu centrul în vârf și tăiem arcul cu una, două sau trei liniuțe. Unghiurile marcate cu **același număr de liniuțe** sunt congruente; unghiurile marcate cu un număr diferit de liniuțe nu sunt (neapărat) congruente între ele. Acesta este procedeul cel mai des întrebuințat.



$\sphericalangle HGK \equiv \sphericalangle H'G'K'$ $\sphericalangle RST \equiv \sphericalangle R'S'T'$ $\sphericalangle PQN \equiv \sphericalangle P'Q'N'$

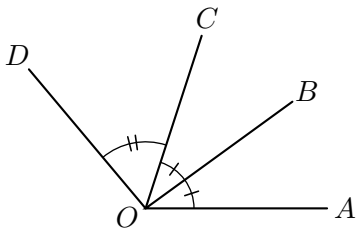
c) Același număr de arce. Unghiurile congruente pot fi marcate și printr-un arc simplu, un arc dublu sau un arc triplu, desenate în fiecare dintre ele.



arc simplu: $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'O'B'$ arc dublu: $\sphericalangle CPD \equiv \sphericalangle C'P'D'$ arc triplu: $\sphericalangle EQF \equiv \sphericalangle E'Q'F'$

d) Unghiurile drepte se marchează cu un pătrățel desenat în vârf (vezi $\sphericalangle PQN$ și $\sphericalangle P'Q'N'$ de mai sus); toate unghiurile drepte sunt congruente între ele.

Exemplu de citire a unei figuri.

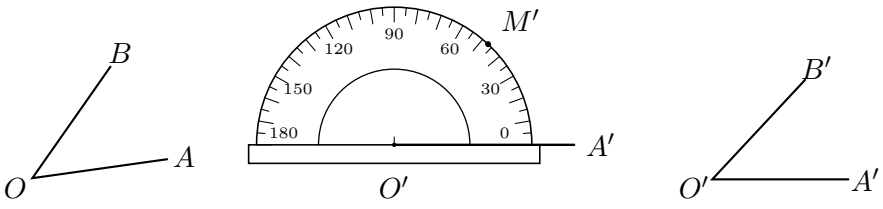


În figura alăturată, unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt marcate cu câte o liniuță, deci $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle BOC$. Unghiul $\sphericalangle COD$ este marcat cu două liniuțe; nu putem afirma, pe baza marcajelor, că el este congruent cu $\sphericalangle AOB$.
Dacă, de exemplu, $m(\sphericalangle AOB) = 36°$, atunci și $m(\sphericalangle BOC) = 36°$.

Atenție! Marcajele de pe figură se fac numai pe baza datelor problemei sau după ce congruența a fost demonstrată, nu „după cum arată” desenul.

7. Construirea unui unghi congruent cu un unghi dat

Fiind dat unghiul $\sphericalangle AOB$, construim cu ajutorul raportorului un unghi $\sphericalangle A'O'B'$ congruent cu el.



unghiul dat pașii 2 și 3 unghiul construit

Pasul 1. Măsurăm unghiul dat: așezăm raportorul cu centrul în O și cu diviziunea 0° pe $[OA$; citim $m(\sphericalangle AOB) = 47^\circ$.

Pasul 2. Desenăm o semidreaptă $[O'A'$ și așezăm raportorul cu centrul în O' și cu diviziunea 0° pe $[O'A'$.

Pasul 3. Marcăm punctul M' în dreptul diviziunii 47°.

Pasul 4. Îndepărtăm raportorul și trasăm semidreapta $[O'M'$; notăm cu B' un punct al ei.
Am obținut $m(\sphericalangle A'O'B') = 47^\circ = m(\sphericalangle AOB)$, deci $\sphericalangle A'O'B' \equiv \sphericalangle AOB$.

Pe scurt

unitatea de măsură	gradul: $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$
instrumentul	raportorul
măsuri remarcabile	unghi nul: 0°; unghi drept: 90°; unghi alungit: 180°
unghiuri congruente	au măsuri egale; notăm $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$