

Elemente de teoria mulțimilor

Capitolul I · Clasa a VI-a · noțiuni teoretice, diagrame și aplicații rezolvate

1. Mulțimi: descriere, notații, moduri de definire și relația de apartenență

Definiția 1 (Noțiunea de mulțime și element)

O **mulțime** reprezintă o colecție bine determinată de obiecte distincte, numite **elementele** mulțimii.

Convenții de notație:

- Mulțimile se notează prin litere mari ale alfabetului latin: $A, B, C, \dots, X, Y, Z$, sau cu indici $A_1, A_2, \dots$
- Elementele se notează de regulă cu litere mici sau cu valori numerice ori simbolice.
- Elementele unei mulțimi se scriu între acolade $\{ \dots \}$ și sunt unice, nu se repetă. Ordinea scrierii elementelor este irelevantă.

Definiția 2 (Relația de apartenență)

Fie A o mulțime și x un obiect matematic.

- Dacă x face parte din colecția A , spunem că x **aparține** mulțimii A și scriem $x \in A$.
- Dacă x nu face parte din colecția A , spunem că x **nu aparține** mulțimii A și scriem $x \notin A$.

1.1. Moduri de definire a mulțimilor

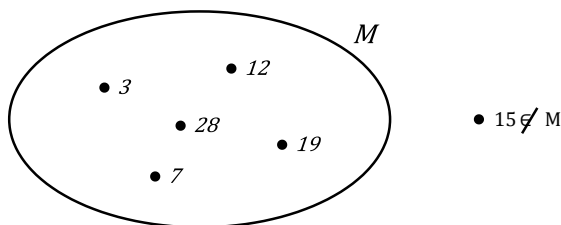
Există trei modalități fundamentale de reprezentare a unei mulțimi:

- Modul explicit (sintetic, prin enumerare):** se listează individual toate elementele, între acolade.
- Modul implicit (analitic, prin proprietate caracteristică):** se specifică o proprietate $P(x)$ pe care o verifică toate elementele mulțimii și numai ele:

$$A = \{x \in U \mid P(x) \text{ este o propoziție adevărată}\}.$$

Se citește: *mulțimea acelor x din U pentru care propoziția $P(x)$ este adevărată.*

- Modul grafic (diagrame Venn-Euler):** reprezentarea vizuală a mulțimii ca o regiune delimitată de o curbă închisă simplă, cu elementele figurate prin puncte în interiorul acesteia.



Mulțimea M reprezentată grafic: elementele ei sunt punctele din interiorul curbei.

Definiția 3 (Mulțimi numerice și nenumerică)

- O mulțime ale cărei elemente sunt exclusiv numere se numește **mulțime numerică**.
- Dacă mulțimea conține cel puțin un element ne-numeric (simboluri, concepte, obiecte), se numește **mulțime nenumerică**.
- Mulțimea care nu conține niciun element se numește **mulțimea vidă** și se notează cu simbolul $\emptyset$.

Exemplul 1.1 — Puteri ale lui 3 și litere

Considerăm următoarele mulțimi:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3^k - 1, k \in \{1, 2, 3, 4\}\};$

b) $B = \{c \mid c \text{ este o literă din alfabetul român prezentă în cuvântul „criptografie”}\}.$

Mulțimea A se mai poate scrie și sub forma $A = \{3^k - 1 \mid k \in \{1, 2, 3, 4\}\}$, care se citește: *mulțimea numerelor de forma $3^k - 1$, cu proprietatea că k se află în mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$.*

Cerință: scrieți mulțimea A prin enumerare, precizați dacă $26 \in A$ și stabiliți dacă B este numerică sau nenumerică.

Rezolvare — Exemplul 1.1

a) Calculăm valorile pentru $k \in \{1, 2, 3, 4\}$:

- $k = 1 \implies x = 3^1 - 1 = 2;$
- $k = 2 \implies x = 3^2 - 1 = 8;$
- $k = 3 \implies x = 3^3 - 1 = 26;$
- $k = 4 \implies x = 3^4 - 1 = 80.$

Așadar, $A = \{2, 8, 26, 80\}$. Observăm că $26 \in A$, deoarece corespunde valorii $k = 3$.

b) Eliminând duplicatele din cuvântul „criptografie”, mulțimea literelor este:

$$B = \{c, r, i, p, t, o, g, a, f, e\}.$$

Deoarece elementele sale sunt litere, B este o **mulțime nenumerică**.

2. Relații între mulțimi: egalitate, incluziune și mulțimea părților

Definiția 4 (Egalitatea a două mulțimi)

Două mulțimi A și B sunt **egale**, și scriem $A = B$, dacă conțin exact aceleași elemente:

$$A = B \iff ((\forall) x \in A \implies x \in B \text{ și } (\forall) x \in B \implies x \in A).$$

Dacă există cel puțin un element care aparține uneia dintre mulțimi și nu aparține celeilalte, scriem $A \neq B$.

Proprietate 1 (Proprietățile relației de egalitate)

Egalitatea mulțimilor este o relație de echivalență:

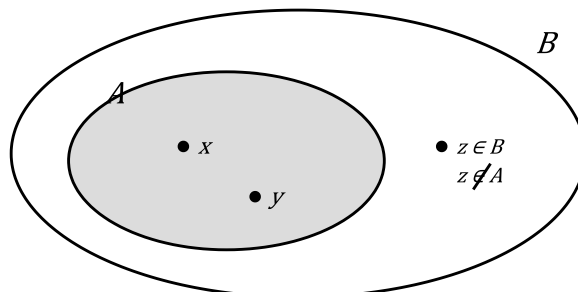
- **Reflexivitate:** $A = A$, pentru orice mulțime A .
- **Simetrie:** dacă $A = B$, atunci $B = A$.
- **Tranzitivitate:** dacă $A = B$ și $B = C$, atunci $A = C$.

Definiția 5 (Incluziunea și submulțimile)

O mulțime A este **inclusă** în mulțimea B , și scriem $A \subset B$, dacă orice element al lui A este și element al lui B :

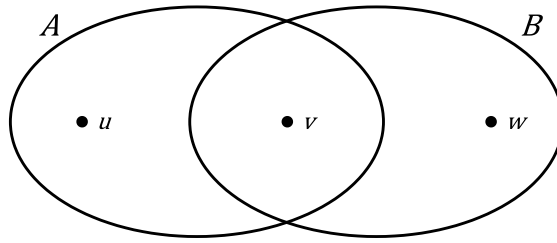
$$A \subset B \iff ((\forall) x \in A \implies x \in B).$$

În acest caz, A se numește **submulțime** (sau parte) a lui B , iar B **include** pe A , ceea ce se notează $B \supset A$. Dacă A nu este inclusă în B , scriem $A \not\subset B$.



Relația de incluziune: $A \subset B$.

Dacă există măcar un element al lui A care nu aparține lui B , atunci A nu este inclusă în B și scriem $A \not\subset B$. În desenul de mai jos, elementul u aparține lui A , dar nu aparține lui B , deci $A \not\subset B$.



$A \not\subset B$: elementul u aparține lui A , dar nu aparține lui B . Elementul v aparține ambelor mulțimi.

Proprietate 2 (Proprietăți fundamentale ale incluziunii)

Pentru orice mulțimi A, B, C :

- Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi: $\emptyset \subset A$.
- Orice mulțime este inclusă în ea însăși: $A \subset A$.
- **Caracterizarea egalității:** $A = B \iff (A \subset B \text{ și } B \subset A)$.
- **Tranzitivitatea incluziunii:** dacă $A \subset B$ și $B \subset C$, atunci $A \subset C$.

Definiția 6 (Cardinalul unei mulțimi finite)

O mulțime este **finită** dacă numărul elementelor sale este un număr natural bine determinat.

Numărul elementelor distincte ale unei mulțimi finite A se numește **cardinalul mulțimii** A și se notează $\text{card}(A)$ sau $|A|$.

De exemplu, pentru $A = \{2, 5, 9, 14\}$ avem $\text{card}(A) = 4$, iar $\text{card}(\emptyset) = 0$.

Definiția 7 (Mulțimea părților)

Mulțimea tuturor submulțimilor unei mulțimi M se numește **mulțimea părților** lui M și se notează $\mathcal{P}(M)$:

$$\mathcal{P}(M) = \{X \mid X \subset M\}.$$

Exemplul 2.1 — Submulțimile unei mulțimi și mulțimea părților

Fie mulțimea $M = \{5, 8, 12\}$.

- Determinați explicit toate elementele mulțimii părților $\mathcal{P}(M)$.
- Aflați numărul de elemente al mulțimii $\mathcal{P}(M)$.

Rezolvare — Exemplul 2.1

- Submulțimile lui M se clasifică după numărul de elemente:

- submulțimea cu 0 elemente: $\emptyset$;
- submulțimile cu 1 element: $\{5\}, \{8\}, \{12\}$;
- submulțimile cu 2 elemente: $\{5, 8\}, \{5, 12\}, \{8, 12\}$;
- submulțimea cu 3 elemente: $\{5, 8, 12\} = M$.

Așadar, $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{5\}, \{8\}, \{12\}, \{5, 8\}, \{5, 12\}, \{8, 12\}, \{5, 8, 12\}\}$.

b) Cardinalul mulțimii părților este $\text{card}(\mathcal{P}(M)) = 8 = 2^3$.

Teorema 1 (Numărul submulțimilor unei mulțimi finite)

Dacă M este o mulțime finită cu $\text{card}(M) = n$, atunci mulțimea părților ei are

$$\text{card}(\mathcal{P}(M)) = 2^n$$

elemente, adică M are exact 2^n submulțimi.

Justificare: pentru fiecare dintre cele n elemente avem două posibilități, fie îl punem în submulțime, fie nu îl punem. Alegerile fiind independente, numărul total de submulțimi este

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ factori}} = 2^n.$$

Printre acestea se află întotdeauna mulțimea vidă și mulțimea M însăși. Numărul submulțimilor **proprii**, adică diferite de $\emptyset$ și de M , este $2^n - 2$.

3. Mulțimi finite și infinite. Cardinalul unei mulțimi finite

Definiția 8 (Mulțimi finite și mulțimi infinite)

- O mulțime A este **finită** dacă numărul elementelor sale este un număr natural bine determinat, adică dacă are cardinal, așa cum a fost definit mai sus.
- În caz contrar, mulțimea este **infinită**: oricât de multe elemente am enumera, șirul lor nu se termină.

Proprietate 3 (Mulțimile numerice fundamentale și mulțimile de divizori sau multipli)

- Mulțimea numerelor naturale: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, mulțime infinită.
- Mulțimea numerelor naturale nenule: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, mulțime infinită.
- Pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$, mulțimea divizorilor naturali ai lui p , notată D_p este **finită**.
- Pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$, mulțimea multiplilor naturali ai lui p , notată M_p este **infinită**.

Exemplul 3.1 — Cardinalul unei mulțimi date printr-o inegalitate

Determinați cardinalul mulțimii $S = \{x \in \mathbb{N} \mid 14 \leq 3x + 2 < 50, x \text{ este număr impar}\}$.

Rezolvare — Exemplul 3.1

Rezolvăm dubla inegalitate în mulțimea numerelor naturale:

$$14 \leq 3x + 2 < 50 \implies 14 - 2 \leq 3x < 50 - 2 \implies 12 \leq 3x < 48.$$

Împărțim prin 3 și obținem $4 \leq x < 16$.

Mulțimea numerelor naturale din acest interval este $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$.

Selectăm doar numerele impare:

$$S = \{5, 7, 9, 11, 13, 15\}.$$

Prin urmare, cardinalul mulțimii este $\text{card}(S) = 6$.

4. Operații cu mulțimi și principiul includerii și excluderii

Definiția 9 (Reuniunea, intersecția și diferența)

Fie A și B două mulțimi.

1. **Reuniunea**, notată $A \cup B$: mulțimea elementelor care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimi:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

2. **Intersecția**, notată $A \cap B$: mulțimea elementelor comune celor două mulțimi:

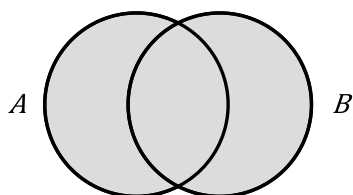
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}.$$

Dacă $A \cap B = \emptyset$, mulțimile A și B se numesc **disjuncte**.

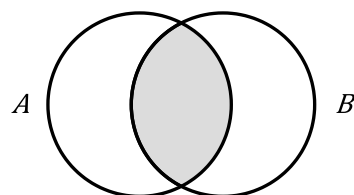
3. **Diferența**, notată $A \setminus B$: mulțimea elementelor care aparțin lui A , dar nu aparțin lui B :

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$

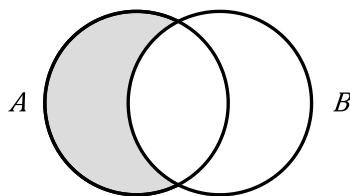
4.1. Reprezentarea grafică a operațiilor cu mulțimi



a) Reuniunea $A \cup B$



b) Intersecția $A \cap B$



c) Diferența $A \setminus B$

Cum se calculează, pas cu pas

Lucrăm cu mulțimile $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ și $B = \{3, 6, 9, 12\}$.

Reuniunea $A \cup B$: scriem toate elementele lui A , apoi adăugăm, din B , numai elementele care nu au fost deja scrise. Niciun element nu se repetă.

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{3, 6, 9, 12\} = \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 12\}.$$

Intersecția $A \cap B$: luăm pe rând fiecare element al lui A și verificăm dacă se află și în B . Păstrăm doar elementele comune.

$$3 \in A \text{ și } 3 \in B; 9 \in A \text{ și } 9 \in B; \text{ celelalte nu sunt comune, deci } A \cap B = \{3, 9\}.$$

Diferența $A \setminus B$: pornim de la elementele lui A și le ștergem pe cele care apar și în B . Rămân elementele care sunt numai în A .

$$A \setminus B = \{1, 5, 7\}, \text{ iar } B \setminus A = \{6, 12\}. \text{ Se vede că } A \setminus B \neq B \setminus A: \text{ la diferență, ordinea mulțimilor contează.}$$

Verificare: $\text{card}(A \cup B) = 7,$ iar
 $\text{card}(A \setminus B) + \text{card}(A \cap B) + \text{card}(B \setminus A) = 3 + 2 + 2 = 7.$

Proprietate 4 (Principiul includerii și excluderii)

Pentru orice două mulțimi finite A și B , cardinalul reuniunii este dat de relația:

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

Formulă echivalentă, prin diferențe disjuncte:

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(A \cap B).$$

Exemplul 4.1 — Clubul de robotică și clubul de șah

La o școală gimnazială, dintr-un grup de 45 de elevi de clasa a VI-a:

- 28 de elevi sunt înscriși la Clubul de Robotică (R);
- 21 de elevi sunt înscriși la Clubul de Șah (S);

- 6 elevi nu participă la niciunul dintre cele două cluburi.

Cerințe:

- Determinați câți elevi participă la ambele cluburi.
- Câți elevi participă exclusiv la Clubul de Robotică?
- Reprezentați situația printr-o diagramă Venn-Euler cu datele numerice reale.

Rezolvare — Exemplul 4.1

a) Notăm cu U mulțimea totală de elevi, deci $\text{card}(U) = 45$. Numărul elevilor care participă la cel puțin un club este cardinalul reuniunii:

$$\text{card}(R \cup S) = 45 - 6 = 39.$$

Aplicăm principiul includerii și excluderii:

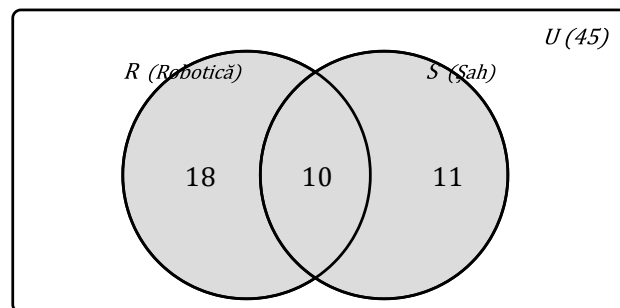
$$39 = 28 + 21 - \text{card}(R \cap S) \implies 39 = 49 - \text{card}(R \cap S) \implies \text{card}(R \cap S) = 10.$$

Deci 10 elevi participă la ambele cluburi.

b) Elevii care participă exclusiv la robotică sunt reprezentați de diferența $R \setminus S$:

$$\text{card}(R \setminus S) = \text{card}(R) - \text{card}(R \cap S) = 28 - 10 = 18.$$

c) Analog, elevii care participă exclusiv la șah sunt $\text{card}(S \setminus R) = 21 - 10 = 11$.



Elevii care nu participă la niciun club: 6

Diagrama Venn-Euler a situației din Exemplul 4.1.

4.2. Produsul cartezian a două mulțimi

Definiția 10 (Produsul cartezian)

Fie A și B două mulțimi. **Produsul cartezian** al mulțimilor A și B , notat $A \times B$ și citit „ A ori B ”, este mulțimea tuturor perechilor ordonate (a, b) , în care primul element este luat din A , iar al doilea din B :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}.$$

Perechile sunt **ordonate**: $(a, b) = (c, d)$ numai dacă $a = c$ și $b = d$. De aceea, în general, $A \times B \neq B \times A$.

Teorema 2 (Cardinalul produsului cartezian)

Dacă A și B sunt mulțimi finite, atunci

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \cdot \text{card}(B).$$

Justificare: primul element al perechii se poate alege în $\text{card}(A)$ moduri, iar al doilea, pentru fiecare alegere, în $\text{card}(B)$ moduri.

Exemplul 4.2 — Produsul cartezian a două mulțimi

Fie $A = \{1, 2\}$ și $B = \{a, b, c\}$. Scrieți mulțimile $A \times B$ și $B \times A$ și aflați cardinalele lor.

Rezolvare — Exemplul 4.2

Așezăm perechile într-un tabel, cu elementele lui A pe linii și cele ale lui B pe coloane:

x	a	b	c
1	$(1, a)$	$(1, b)$	$(1, c)$
2	$(2, a)$	$(2, b)$	$(2, c)$

Tabelul perechilor din $A \times B$.

Așadar, $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$, cu $\text{card}(A \times B) = 2 \cdot 3 = 6$.

Schimbând ordinea, $B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$, tot cu 6 elemente, dar perechile sunt diferite, deci $A \times B \neq B \times A$.

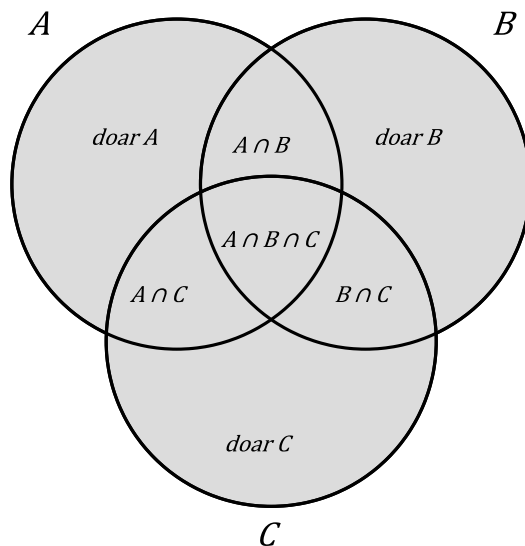
4.3. Principiul includerii și excluderii pentru trei mulțimi

Proprietate 5 (Principiul includerii și excluderii pentru trei mulțimi)

Pentru orice mulțimi finite A, B, C :

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C).$$

Se adună întâi cele trei mulțimi, se scad intersecțiile luate două câte două, pentru că elementele lor au fost numărate de două ori, apoi se adaugă la loc intersecția tuturor celor trei, pentru că elementele ei au fost întâi numărate de trei ori și apoi scăzute tot de trei ori.



Cele șapte regiuni determinate de trei mulțimi care se intersectează.

Exemplul 4.3 — Trei discipline opționale

Dintr-un grup de 100 de elevi, 52 studiază engleza (E), 45 studiază franceza (F), 38 studiază germana (G); 20 studiază engleza și franceza, 15 studiază engleza și germana, 12 studiază franceza și germana, iar 5 studiază toate trei limbile. Câți elevi studiază cel puțin o limbă străină și câți nu studiază niciuna?

Rezolvare — Exemplul 4.3

Aplicăm principiul includerii și excluderii pentru trei mulțimi:

$$\text{card}(E \cup F \cup G) = 52 + 45 + 38 - 20 - 15 - 12 + 5 = 93.$$

Deci 93 de elevi studiază cel puțin o limbă străină, iar $100 - 93 = 7$ elevi nu studiază niciuna.

5. Exerciții și probleme propuse, cu soluții complete

5.1. Probleme de antrenament

Problema 1.

Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 36\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \text{ este divizor al lui } 24\}$.

- Scieți mulțimile A și B prin enumerare.
- Determinați mulțimile $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.
- Determinați cardinalul mulțimii $\mathcal{P}(A \cap B)$.

Problema 2.

Determinați numerele naturale a și b pentru care mulțimile $M = \{2a + 1, 9, 16\}$ și $N = \{b^2, 7, 16\}$ sunt egale.

Problema 3.

Într-un grup de 60 de pasionați de informatică, 38 programează în Python, 29 programează în C++, iar 5 nu cunosc niciunul dintre aceste limbaje. Câți pasionați programează în ambele limbaje?

5.2. Soluții

Soluția problemei 1

a) Pentru mulțimea A : $x \in \mathbb{N}$ cu $x^2 \leq 36 \implies x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Pentru mulțimea B : divizorii naturali nenuli ai lui 24 sunt $D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.

b) Calculăm operațiile cu mulțimi:

- $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 24\}$;
- $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$;
- $A \setminus B = \{0, 5\}$;
- $B \setminus A = \{8, 12, 24\}$.

c) Cardinalul intersecției este $\text{card}(A \cap B) = 5$. Prin urmare, cardinalul mulțimii părților este $\text{card}(\mathcal{P}(A \cap B)) = 2^5 = 32$.

Soluția problemei 2

Deoarece $M = N$, mulțimile trebuie să conțină aceleași elemente. Observăm că $16 \in M$ și $16 \in N$, deci mulțimile rămase $\{2a + 1, 9\}$ și $\{b^2, 7\}$ trebuie să aibă aceleași elemente. Avem două posibilități de potrivire:

- **Cazul 1:** $2a + 1 = 7 \implies 2a = 6 \implies a = 3$. Atunci celălalt element trebuie să fie $b^2 = 9 \implies b = 3$, deoarece $b \in \mathbb{N}$.
- **Cazul 2:** $2a + 1 = b^2$ și $9 = 7$, imposibil, deoarece $9 \neq 7$.

Prin urmare, soluția unică este $a = 3$ și $b = 3$.

Soluția problemei 3

Fie P mulțimea celor care programează în Python și C mulțimea celor care programează în C++. Grupul are 60 de persoane, deci numărul total de elemente este 60. Numărul celor care

cunosc cel puțin un limbaj este:

$$\text{card}(P \cup C) = 60 - 5 = 55.$$

Conform principiului includerii și excluderii:

$$55 = 38 + 29 - \text{card}(P \cap C) \implies 55 = 67 - \text{card}(P \cap C) \implies \text{card}(P \cap C) = 12.$$

Răspuns: 12 pasionați programează în ambele limbaje.