mateexamene.ro
Prof. Micu Elena
Micu Elena

Fișa teoretică II.1

Definiția relației de divizibilitate pe mulțimea numerelor naturale. Noțiunea de divizor și de multiplu

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este licențiat sub Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără Derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0).

1. Definiția relației de divizibilitate

Fie $a, b \in \mathbb{N}$. Spunem că numărul natural b **divide** numărul natural a dacă există un număr natural c astfel încât

$$a = b \cdot c.$$

Notații: $b \mid a$ (se citește „b divide a") sau $a \vdots b$ (se citește „a este divizibil cu b" sau „a se divide cu b").

Dacă b nu divide a, scriem $b \nmid a$ sau $a \not\vdots b$.

Exemple

- $3 \mid 12$, deoarece $12 = 3 \cdot 4$, iar $4 \in \mathbb{N}$.
- $7 \mid 0$, deoarece $0 = 7 \cdot 0$.
- $5 \nmid 12$, deoarece nu există $c \in \mathbb{N}$ cu $12 = 5 \cdot c$ ($5 \cdot 2 = 10 < 12 < 15 = 5 \cdot 3$).

2. Noțiunea de divizor și de multiplu

Dacă $b \mid a$, atunci:

- b se numește **divizor** al lui a;
- a se numește **multiplu** al lui b.

$$b \mid a \iff a \vdots b \iff b \text{ este divizor al lui } a \iff a \text{ este multiplu al lui } b.$$

Exemplu

Din $24 = 6 \cdot 4$ rezultă $6 \mid 24$ și $4 \mid 24$: numerele 6 și 4 sunt divizori ai lui 24, iar 24 este multiplu al lui 6 și multiplu al lui 4.

Observații

1. Nu există pentru orice pereche de numere naturale a și b un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$, ceea ce înseamnă că relația $b \mid a$ nu este peste tot definită în $\mathbb{N}$ (de exemplu, $5 \nmid 12$).
2. $1 \mid a$ și $a \mid a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$, deoarece $a = 1 \cdot a$.
3. $a \mid 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$, deoarece $0 = a \cdot 0$: numărul 0 este multiplu al oricărui număr natural.
4. $0 \mid a$ numai pentru $a = 0$: singurul multiplu al lui 0 este 0.

3. Mulțimea divizorilor unui număr natural

Pentru $a \in \mathbb{N}$, mulțimea divizorilor lui a este

$$\mathscr{D}_a = \{x \in \mathbb{N} \mid x \,/\, a\}.$$

- Dacă $a \in \mathbb{N}^*$, atunci $\mathscr{D}_a$ este o mulțime **finită**, iar orice divizor x al lui a verifică $1 \leq x \leq a$.
- $\mathscr{D}_0 = \mathbb{N}$.
- Pentru $a \geq 2$, numerele 1 și a se numesc **divizori improprii** ai lui a; ceilalți divizori ai lui a se numesc **divizori proprii**.

Exemplu

Determinăm $\mathscr{D}_{12}$, scriindu-l pe 12 ca produs de două numere naturale în toate modurile posibile:

$$12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4.$$

Deci $\mathscr{D}_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Divizorii improprii sunt 1 și 12, iar divizorii proprii sunt $2, 3, 4, 6$.

4. Mulțimea multiplilor unui număr natural

Pentru $a \in \mathbb{N}$, mulțimea multiplilor lui a este

$$\mathscr{M}_a = \{a \cdot k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{0,\ a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots\}.$$

- Dacă $a \in \mathbb{N}^*$, atunci $\mathscr{M}_a$ este o mulțime **infinită**.
- $\mathscr{M}_0 = \{0\}$ și $\mathscr{M}_1 = \mathbb{N}$.

Observație

Dacă numărul natural a este multiplu al numărului natural b, putem scrie

$$a \in \mathscr{M}_b \quad \text{sau, direct,} \quad a = \mathrm{M}_b.$$

De exemplu: $35 \in \mathscr{M}_7$ sau $35 = \mathrm{M}_7$.

Dacă restul împărțirii numărului natural a la numărul natural nenul b este r, putem scrie

$$a = \mathrm{M}_b + r.$$

De exemplu: $38 = 7 \cdot 5 + 3$, deci $38 = \mathrm{M}_7 + 3$.

Exemplu

$\mathscr{M}_5 = \{0, 5, 10, 15, 20, \ldots\}$. Multiplii lui 5 mai mici decât 23 sunt $0, 5, 10, 15, 20$.

De reținut

$$b \in \mathscr{D}_a \iff b \,/\, a \iff a \vdots b \iff a \in \mathscr{M}_b.$$