Matematică, clasa a V-a. Operații cu numere naturale

Lecția 1. Adunarea numerelor naturale

Definiție, proprietăți, tehnici de calcul rapid și aplicații

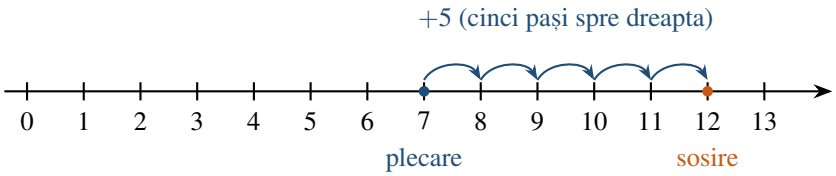
Autor: Prof. Micu Elena

Acest material este publicat sub licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0): poate fi distribuit gratuit, cu indicarea autorului și a sursei, fără modificări și fără scop comercial.

1. Ce este adunarea

Adunarea este prima operație pe care o învățăm și, în același timp, operația din care se construiesc toate celelalte. Pornim de la o situație concretă: într-o cutie sunt 7 creioane, iar în alta sunt 5. Punând creioanele la un loc obținem 12 creioane. Spunem că 12 este **suma** numerelor 7 și 5 și scriem $7+5=12$.

Pe axa numerelor, adunarea înseamnă o deplasare spre dreapta: plecăm din 7 și facem 5 pași de câte o unitate.



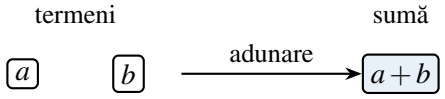
Definiție și denumiri

Oricăror două numere naturale a și b li se asociază un număr natural, unic, notat $a+b$ și numit **suma** lor. Operația prin care se obține suma se numește **adunare**.

$$a + b = s$$

a, b – **termenii** sumei
s – **suma** (rezultatul adunării)

Suma a două numere naturale este întotdeauna un număr natural: spunem că adunarea este o operație **peste tot definită** pe $\mathbb{N}$.



2. Adunarea în scris

Pentru numere mari așezăm termenii unul sub altul, unități sub unități, zeci sub zeci și așa mai departe, apoi adunăm de la dreapta la stânga. Dacă suma cifrelor de pe o coloană depășește 9, scriem cifra unităților și *transportăm* o unitate la ordinul următor.

	M	S	Z	U
	1	1	1	
	4	6	8	7
+	2	5	4	9
	7	3	3	6

$7+9=16$: scriem 6, transportăm 1
$1+8+4=13$: scriem 3, transportăm 1
$1+6+5=12$: scriem 2, transportăm 1
$1+4+2=7$

Așadar $4\,687 + 2\,549 = 7\,236$.

Proba adunării

Rezultatul se verifică schimbând ordinea termenilor ($2\,549 + 4\,687 = 7\,236$) sau scăzând unul dintre termeni din sumă ($7\,236 - 2\,549 = 4\,687$). Obișnuiți-vă să faceți proba: cele mai multe greșeli apar la transportul unității.

3. Proprietățile adunării

Proprietăți

Pentru orice numere naturale a, b, c au loc egalitățile:

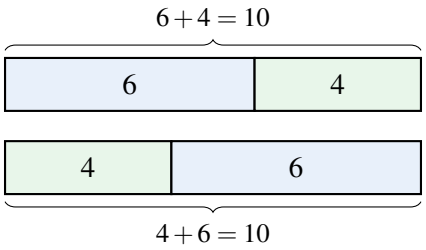
P1. Comutativitatea: $a + b = b + a$. *Ordinea termenilor nu schimbă suma.*

P2. Asociativitatea: $(a + b) + c = a + (b + c)$. *Modul de grupare a termenilor nu schimbă suma.*

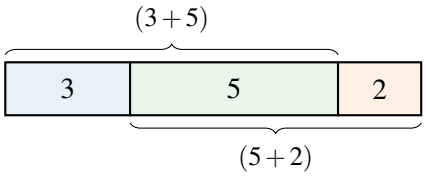
P3. Elementul neutru: $a + 0 = 0 + a = a$. *Numărul 0 este element neutru la adunare.*

Comutativitatea, în imagine

Două bare puse cap la cap au aceeași lungime totală indiferent de ordinea în care le așezăm.



Asociativitatea, în imagine



$(3 + 5) + 2 = 8 + 2 = 10$ și $3 + (5 + 2) = 3 + 7 = 10$

De ce contează proprietățile

Comutativitatea și asociativitatea, folosite împreună, ne permit să **schimbăm ordinea** și să **grupăm oricum** termenii unei sume. Alegem gruparea care dă numere „rotunde” (zeci, sute, mii) și calculul devine mult mai ușor.

Grupări convenabile

Calculați $S = 28 + 145 + 72 + 355 + 61 + 39$.

Rezolvare. Căutăm perechi care dau zeci sau sute întregi: $28 + 72 = 100$, $145 + 355 = 500$, $61 + 39 = 100$. Atunci

$$S = (28 + 72) + (145 + 355) + (61 + 39) = 100 + 500 + 100 = 700.$$

Descompunerea unui termen

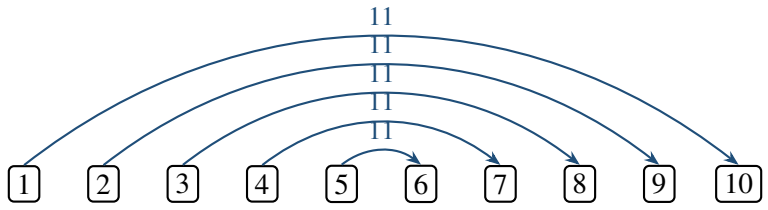
Calculați $S = 996 + 1997 + 2998$.
Rezolvare. Fiecare termen este „aproape” un număr rotund: $996 = 1000 - 4$, $1997 = 2000 - 3$, $2998 = 3000 - 2$. Scriem

$$S = (1000 + 2000 + 3000) - (4 + 3 + 2) = 6000 - 9 = 5991.$$

Metoda a doua. Adăugăm la fiecare termen ceea ce îi lipsește și apoi scădem ce am adăugat: $S + 9 = 1000 + 2000 + 3000 = 6000$, deci $S = 6000 - 9 = 5991$.

4. Sume cu mulți termeni. Metoda perechilor

Pentru sumele în care termenii cresc cu aceeași cantitate (din 1 în 1, din 2 în 2 etc.) există o tehnică foarte eficientă: scriem suma o dată în ordinea dată și o dată în ordine inversă, apoi adunăm termen cu termen. Toate perechile au aceeași sumă.



5 perechi, fiecare cu suma 11 $\Rightarrow$ $1 + 2 + \ldots + 10 = 5 \cdot 11 = 55$

Suma primelor n numere naturale nenule

Pentru orice număr natural nenul n:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Justificare. Notăm $S = 1 + 2 + \ldots + n$. Scriem suma și în ordine inversă, apoi adunăm:

$$\begin{array}{rcl} S & = & 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n \\ S & = & n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 \\ \hline 2S & = & \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)}_{n \text{ termeni}} = n \cdot (n+1) \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad S = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Produsul $n \cdot (n+1)$ este întotdeauna par (unul dintre cele două numere consecutive este par), deci împărțirea la 2 se face exact.

Sume de numere consecutive

a)

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 60 = \frac{60 \cdot 61}{2} = 30 \cdot 61 = 1830.$$

b)

$$41 + 42 + \ldots + 90 = (1 + 2 + \ldots + 90) - (1 + 2 + \ldots + 40) =$$
$$= \frac{90 \cdot 91}{2} - \frac{40 \cdot 41}{2} = 4095 - 820 = 3275.$$

c) *Metoda perechilor direct:* suma $41 + 42 + \ldots + 90$ are $90 - 41 + 1 = 50$ de termeni; prima

pereche $41+90=131$, iar fiecare pereche are suma 131. Sunt $50:2=25$ de perechi, deci

$$S = 25 \cdot 131 = 3275.$$

Numărul termenilor

Înainte de a forma perechi, numărați termenii! Pentru numere consecutive de la p la q sunt $q-p+1$ termeni. Pentru numere din 2 în 2 (sau din k în k) sunt $(q-p):2+1$ termeni (respectiv $(q-p):k+1$).

Sumă de numere impare

Calculați $S = 1+3+5+\ldots+99$.

Rezolvare. Termenii cresc din 2 în 2, deci sunt $(99-1):2+1=50$ de termeni. Scriem suma în ambele sensuri:

$$\begin{array}{rcl} S & = & 1+3+5+\ldots+99 \\ S & = & 99+97+95+\ldots+1 \\ \hline 2S & = & \underbrace{100+100+\ldots+100}_{50 \text{ termeni}} = 5000 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad S = 2500.$$

Observație. Suma primelor n numere impare este $n \cdot n$:

$$1+3=4=2\cdot 2, \qquad 1+3+5=9=3\cdot 3, \qquad 1+3+5+7=16=4\cdot 4.$$

Aici $n=50$ și $50\cdot 50=2500$.

Sume cu termeni de forma 9, 99, 999, ...

Calculați $S = 9+99+999+\ldots+\underbrace{99\ldots9}_{15 \text{ cifre}}$.

Rezolvare. Fiecare termen este cu 1 mai mic decât o putere a lui 10. Adăugăm câte 1 la fiecare dintre cei 15 termeni:

$$S+15 = 10+100+1000+\ldots+\underbrace{100\ldots0}_{16 \text{ cifre}} = \underbrace{11\ldots10}_{15 \text{ cifre}},$$

deci

$$S = \underbrace{11\ldots10}_{15 \text{ cifre}} - 15 = \underbrace{11\ldots1095}_{13 \text{ cifre}}.$$

5. Adunarea și relațiile de egalitate și de ordine

Adunarea păstrează egalitatea și ordinea

Pentru orice numere naturale a, b, c, d:

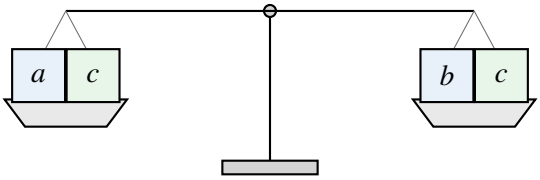
R1. dacă $a = b$, atunci $a + c = b + c$ (*adunăm același număr în ambii membri*);

R2. dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $a + c = b + d$ (*adunăm egalitățile membru cu membru*);

R3. dacă $a < b$, atunci $a + c < b + c$ (*adunăm același număr în ambii membri*);

R4. dacă $a < b$ și $c < d$, atunci $a + c < b + d$ (*adunăm inegalitățile de același sens membru cu membru*).

Proprietățile R3 și R4 rămân adevărate dacă înlocuim „$<$” cu „$\leqslant$”, „$>$” sau „$\geqslant$” (același semn în toate relațiile).



Dacă $a = b$, balanța rămâne în echilibru și după ce punem c pe fiecare taler: $a + c = b + c$.

Ce nu avem voie să facem

Inegalitățile de sensuri diferite **nu se adună** membru cu membru. De exemplu, $2 < 5$ și $9 > 1$ sunt adevărate, dar din adunarea lor am obține $11 \;?\; 6$, fără a putea spune ce semn se pune. Adunăm membru cu membru numai relații cu același semn.

Calcul fără a afla necunoscutele

Numerele naturale x și y verifică $x + y = 35$ și $x + 3y = 71$. Calculați $m = (x + 4) + (y + 9)$ și $n = 2x + 4y$.

Rezolvare.

$$m = (x + y) + (4 + 9) = 35 + 13 = 48.$$

Adunând cele două egalități membru cu membru (R2):

$$(x + y) + (x + 3y) = 35 + 71, \quad \text{adică} \quad 2x + 4y = 106,$$

deci $n = 106$. Nu a fost nevoie să aflăm x și y.

Comparare folosind inegalitățile

Fie n un număr natural cu $n \geqslant 4$. Comparați numerele $A = n + 9$ și $B = 3n + 1$.

Rezolvare. Din $n \geqslant 4$ adunăm membru cu membru cu $n \geqslant 4$ (R4): $2n \geqslant 8$. Adunăm $n + 1$ în ambii membri (R3):

$$3n + 1 \geqslant n + 9, \quad \text{adică} \quad B \geqslant A.$$

Egalitatea are loc numai pentru $n = 4$ ($A = B = 13$); pentru $n > 4$ avem $B > A$.

6. Paritatea sumei

Un număr natural este **par** dacă ultima sa cifră este 0, 2, 4, 6 sau 8, și **impar** dacă ultima cifră este 1, 3, 5, 7 sau 9.

primul termen		al doilea termen	suma
par	+	par	**par**
impar	+	impar	**par**
par	+	impar	**impar**

$$148+236=384$$
$$153+241=394$$
$$148+241=389$$

Regula parității

Suma a două numere de **aceeași paritate** este un număr **par**; suma a două numere de **parități diferite** este un număr **impar**. În general, o sumă de mai mulți termeni este pară dacă are un număr par de termeni impari și este impară dacă are un număr impar de termeni impari (termenii pari nu influențează paritatea sumei).

Imposibilitate dovedită prin paritate

Se pot alege 7 numere naturale impare cu suma 100?
Rezolvare. Nu. O sumă de 7 numere impare are un număr impar de termeni impari, deci este impară, în timp ce 100 este par. Prin urmare, oricum am alege cele 7 numere impare, suma lor nu poate fi 100.

7. Estimarea unei sume

Când nu avem nevoie de rezultatul exact (de exemplu, la verificarea rapidă a unui calcul), rotunjim termenii la ordinul cerut, apoi adunăm.

Rotunjire

Estimați suma $4\,187+2\,936$ rotunjind la mii, apoi la sute, și comparați cu valoarea exactă.
Rezolvare.

La mii: $4\,000+3\,000=7\,000$; la sute: $4\,200+2\,900=7\,100$; exact: $4\,187+2\,936=7\,123$.

Estimarea la sute este mai apropiată de rezultat; estimarea la mii este suficientă pentru a observa, de exemplu, că un rezultat de forma $6\,123$ ar fi greșit.

8. Probleme care se rezolvă prin adunare

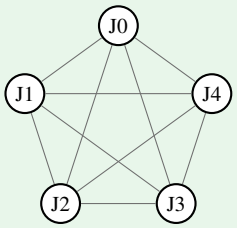
Număr de partide

La un turneu de tenis de masă participă n jucători și fiecare joacă exact o partidă cu fiecare dintre ceilalți. Câte partide se joacă în total?
Rezolvare. Așezăm jucătorii într-o ordine. Primul joacă cu ceilalți $n-1$ jucători. Al doilea a jucat deja cu primul, deci mai are $n-2$ partide noi. Al treilea mai are $n-3$ partide noi, și tot așa, până la penultimul jucător, care mai are o singură partidă nouă. Numărul total de partide este

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=\frac{(n-1)\cdot n}{2}.$$

Pentru $n = 12$ jucători se joacă

$$\frac{11 \cdot 12}{2} = 66 \text{ de partide.}$$



5 jucători: $4+3+2+1 = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ partide

Șir de sume

Se consideră numerele $s_1 = 1$, $s_2 = 1+2$, $s_3 = 1+2+3$, …, $s_n = 1+2+\ldots+n$. Calculați $s_{2026} - s_{2021}$.

Rezolvare. s_{2026} conține toți termenii lui s_{2021} și, în plus, termenii 2022, 2023, 2024, 2025, 2026. Deci

$$s_{2026} - s_{2021} = 2022+2023+2024+2025+2026 = 5 \cdot 2024 = 10\,120,$$

unde am folosit că termenii sunt simetrici față de 2024: $(2022+2026)+(2023+2025)+2024 = 4\,048+4\,048+2\,024$.