Matematică, clasa a V-a. Operații cu numere naturale

Lecția 2. Scăderea numerelor naturale

Definiție, legătura cu adunarea, paranteze, proprietăți și aplicații

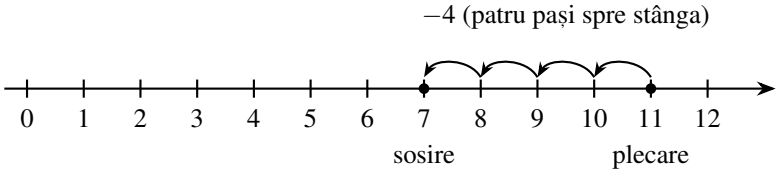
Autor: Prof. Micu Elena

Acest material este publicat sub licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0): poate fi distribuit gratuit, cu indicarea autorului și a sursei, fără modificări și fără scop comercial.

1. Ce este scăderea

Într-un coș sunt 11 mere. Luăm 4 dintre ele. Câte rămân? Răspunsul, 7, se obține prin **scădere**: $11-4=7$. Scăderea răspunde la întrebări de tipul „cât rămâne?”, „cu cât este mai mare?” sau „cât lipsește până la?”.

Pe axa numerelor, scăderea înseamnă o deplasare spre stânga: plecăm din 11 și facem 4 pași înapoi.



Definiție și denumiri

Fie a și b numere naturale cu $a \geqslant b$. Numărul natural c cu proprietatea $b+c=a$ se numește **diferența** numerelor a și b și se notează $a-b$. Operația prin care se obține diferența se numește **scădere**.

$a - b = c$

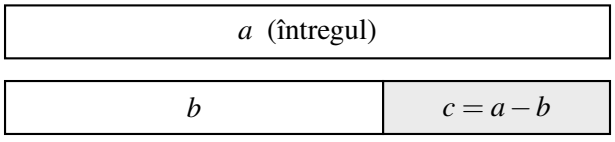
a – **descăzutul** (numărul din care se scade)
b – **scăzătorul** (numărul care se scade)
c – **diferența** (rezultatul scăderii)

Scăderea nu este peste tot definită pe $\mathbb{N}$

Diferența $a-b$ există în mulțimea numerelor naturale **numai dacă** $a \geqslant b$. De exemplu, $5-9$ nu are sens în $\mathbb{N}$: nu putem lua 9 mere dintr-un coș în care sunt doar 5. Spre deosebire de adunare, scăderea **nu** este o operație peste tot definită pe $\mathbb{N}$. Ori de câte ori scriem $a-b$ în această lecție, presupunem că $a \geqslant b$.

2. Legătura dintre scădere și adunare

Scăderea este operația **inversă** adunării: a calcula $a-b$ înseamnă a găsi numărul care, adunat cu b, dă a. Un desen de tip „întreg și părți” arată clar legătura.



$b+c=a$
$a-b=c$
$a-c=b$

Trei egalități echivalente

Pentru numere naturale a, b, c cu $a \geqslant b$ și $a \geqslant c$, următoarele afirmații înseamnă același lucru:

$$a-b=c \iff a=b+c \iff a-c=b.$$

De aici rezultă:

- **proba scăderii**: adunăm diferența cu scăzătorul și trebuie să obținem descăzutul ($c+b=a$);
- **aflarea unui termen necunoscut**: dintr-o sumă, un termen se află scăzând celălalt termen din sumă; dintr-o diferență, descăzutul se află adunând diferența cu scăzătorul, iar scăzătorul se află scăzând diferența din descăzut.

Proba și termenul necunoscut

a)

$$2\,304 - 867 = 1\,437; \qquad \text{proba: } 1\,437 + 867 = 2\,304. \checkmark$$

b) Aflați x din $x + 418 = 1\,250$. *Rezolvare.*

$$x = 1\,250 - 418 = 832; \qquad \text{verificare: } 832 + 418 = 1\,250.$$

c) Aflați x din $x - 596 = 1\,004$. *Rezolvare.* x este descăzutul, deci

$$x = 1\,004 + 596 = 1\,600.$$

d) Aflați x din $3\,000 - x = 1\,275$. *Rezolvare.* x este scăzătorul, deci

$$x = 3\,000 - 1\,275 = 1\,725.$$

3. Scăderea în scris

Așezăm scăzătorul sub descăzut, ordin sub ordin, și scădem de la dreapta la stânga. Când cifra de sus este mai mică decât cea de jos, *împrumutăm* o unitate de la ordinul următor (care valorează 10 unități ale ordinului curent).

	M	S	Z	U	
	5	2	0	3	$3 < 7$: împrumutăm; $13 - 7 = 6$
$-$	1	8	4	7	$0 - 1 =$ nu se poate; împrumutăm; $10 - 1 - 4 = 5$
	3	3	5	6	$2 - 1 = 1 < 8$: împrumutăm; $11 - 8 = 3$; $5 - 1 - 1 = 3$

Așadar $5\,203 - 1\,847 = 3\,356$. Proba: $3\,356 + 1\,847 = 5\,203$.

Împrumut în lanț

Când deasupra este cifra 0 și trebuie să împrumutăm, luăm unitatea de la primul ordin nenul din stânga; toate zerourile sărite devin 9. De exemplu, $4\,000 - 1\,236$: unitățile devin 10, iar zecile și sutele devin 9; rezultatul este 2 764. O cale mai simplă:

$$4\,000 - 1\,236 = (3\,999 - 1\,236) + 1 = 2\,763 + 1 = 2\,764.$$

4. Proprietăți ale scăderii

Ce păstrează și ce nu păstrează scăderea

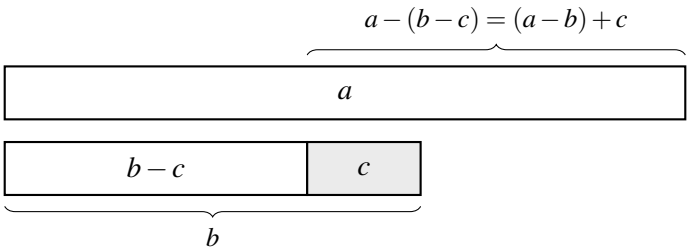
- Scăderea **nu este comutativă**: $9 - 4 = 5$, dar $4 - 9$ nu există în $\mathbb{N}$. În general $a - b \neq b - a$ (cu excepția cazului $a = b$).

- Scăderea **nu este asociativă**:

$$(20-8)-5=12-5=7, \qquad \text{dar} \qquad 20-(8-5)=20-3=17.$$

- $a-0=a$ (zero este element neutru la dreapta); $a-a=0$.
- **Scăderea unei sume:** $a-(b+c)=a-b-c$. **Scăderea unei diferențe:** $a-(b-c)=a-b+c$.
- **Adunarea unei diferențe:** $a+(b-c)=a+b-c$.

Egalitatea $a-(b-c)=a-b+c$ se vede ușor pe un desen: din a scădem b, dar am scăzut prea mult cu c, deci îl adăugăm înapoi.



5. Exerciții cu adunări și scăderi. Semnul din fața numărului

Într-un exercițiu care conține numai adunări și scăderi, fără paranteze, operațiile se fac în ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta. Există însă o regulă care ne dă libertate:

Schimbarea ordinii termenilor

Într-un șir de adunări și scăderi fără paranteze, putem schimba ordinea termenilor **cu condiția ca fiecare număr să fie mutat împreună cu semnul din fața lui**. Primul termen, care nu are semn scris, se consideră cu semnul „+”. Calculul se face în ordinea nouă numai dacă fiecare scădere intermediară este posibilă în $\mathbb{N}$.

$$a-b-c+d \;=\; a+d-b-c \;=\; d+a-c-b.$$

$E=\quad 12 \quad -5 \quad +8 \quad -3 \quad -4$ „-5” se mută împreună cu semnul „$-$”

$E=\quad 12 \quad +8 \quad -5 \quad -3 \quad -4$ „$+8$” se mută împreună cu semnul „$+$”

Verificare: $12-5+8-3-4=7+8-3-4=15-3-4=8$ și $12+8-5-3-4=20-5-3-4=8$.

Ordine convenabilă

Calculați $E=1\,000-236-317+236-447+317$.

Rezolvare. Observăm că 236 apare o dată cu „$-$” și o dată cu „$+$”, la fel și 317. Mutăm termenii împreună cu semnele lor:

$$E=1\,000+236-236+317-317-447=1\,000+0+0-447=553.$$

6. Parantezele

Ordinea parantezelor

Se folosesc paranteze rotunde ( ), paranteze drepte [ ] și acolade { }. Se calculează mai întâi ce este în parantezele rotunde, apoi ce este în parantezele drepte și la final ce este în acolade. După ce o paranteză rotundă dispare, parantezele drepte devin rotunde, iar acoladele devin paranteze drepte.

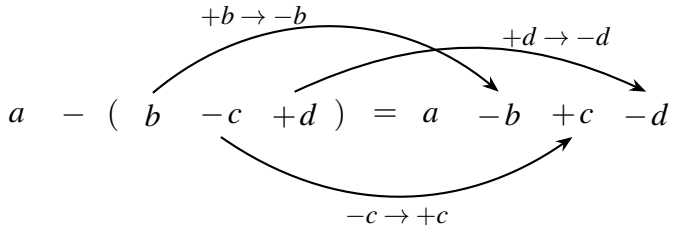
Calcul cu trei tipuri de paranteze

$$E = 50 - \{30 - [25 - (17 - 9)] + 4\}$$
$$= 50 - \{30 - [25 - 8] + 4\} = 50 - [30 - 17 + 4] = 50 - (13 + 4) = 50 - 17 = 33.$$

Desfacerea parantezelor

Dacă într-o paranteză sunt numai adunări și scăderi, paranteza se poate **desface**:

- semnul „+” în fața parantezei **păstrează** semnele termenilor din paranteză: $a + (b - c + d) = a + b - c + d$;
- semnul „−” în fața parantezei **schimbă** semnele **tuturor** termenilor din paranteză: $a - (b - c + d) = a - b + c - d$.



Greșeala clasică

Minusul din fața parantezei schimbă semnul **fiecărui** termen, nu doar al primului.

Corect: $20 - (7 + 5 - 2) = 20 - 7 - 5 + 2 = 10$. Greșit: $20 - 7 + 5 - 2 = 16$.

Verificați întotdeauna calculând și în paranteză: $7 + 5 - 2 = 10$, iar $20 - 10 = 10$.

Două metode

Calculați $E = 45 - (12 + 9 - 4 + 6 - 3)$ în două moduri.
Metoda 1 (în paranteză).

$$12 + 9 - 4 + 6 - 3 = 21 - 4 + 6 - 3 = 17 + 6 - 3 = 23 - 3 = 20, \quad \text{deci} \quad E = 45 - 20 = 25.$$

Metoda 2 (desfacem paranteza).

$$E = 45 - 12 - 9 + 4 - 6 + 3 = 33 - 9 + 4 - 6 + 3 = 24 + 4 - 6 + 3 = 28 - 6 + 3 = 22 + 3 = 25.$$

Simplificare înainte de calcul

Calculați $E = (738 + 295) - (295 - 162) - (162 + 538)$.
Rezolvare. Desfacem parantezele:

$$E = 738 + 295 - 295 + 162 - 162 - 538.$$

Termenii 295 și 162 apar cu semne opuse și se reduc: $E = 738 - 538 = 200$. Calculul efectiv al parantezelor ar fi fost mai lung și mai predispus la greșeli.

7. Scăderea și relațiile de egalitate și de ordine

Scăderea aceluiași număr

Pentru numere naturale a, b, c, d, atunci când scăderile au sens:

R1. dacă $a = b$, atunci $a - c = b - c$ (*scădem același număr din ambii membri*);

R2. dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $a - c = b - d$ (*scădem egalitățile membru cu membru*);

R3. dacă $a < b$, atunci $a - c < b - c$ (*scădem același număr din ambii membri*);

R4. dacă $a < b$ și $c > d$, atunci $a - c < b - d$ (*scădem membru cu membru inegalități de sensuri contrare*).

Proprietățile R3 și R4 rămân adevărate pentru „$\leqslant$”, „$>$”, „$\geqslant$”.

Diferit de adunare

La adunare se adună membru cu membru inegalități de **același** sens. La scădere se scad membru cu membru inegalități de **sensuri contrare**: din cel mai mic scădem cel mai mare, din cel mai mare scădem cel mai mic. Exemplu: $3 < 10$ și $7 > 2$ dau $3 - 7 < 10 - 2$? Primul membru nu are sens în $\mathbb{N}$, dar cu $8 < 10$ și $7 > 2$ obținem $8 - 7 < 10 - 2$, adică $1 < 8$, adevărat. În schimb, din $8 < 10$ și $2 < 7$ **nu** putem deduce nimic despre $8 - 2$ și $10 - 7$: $6 > 3$.

Egalități scăzute membru cu membru

Numerele naturale x și y verifică $3x + 2y = 94$ și $2x + 2y = 70$. Aflați x și y.
Rezolvare. Scădem egalitățile membru cu membru (R2):

$$(3x + 2y) - (2x + 2y) = 94 - 70 \quad \Rightarrow \quad 3x + 2y - 2x - 2y = 24 \quad \Rightarrow \quad x = 24.$$

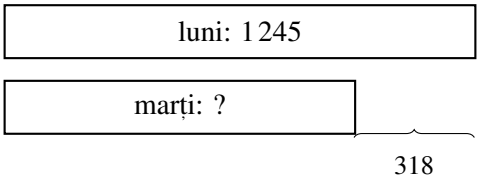
Atunci $2y = 70 - 2 \cdot 24 = 22$, de unde $y = 11$. Verificare: $3 \cdot 24 + 2 \cdot 11 = 72 + 22 = 94$. ✓

8. Probleme

Cu cât este mai mare

Un magazin a vândut luni 1 245 de pâini, iar marți cu 318 mai puține decât luni. Câte pâini a vândut în cele două zile împreună?
Rezolvare.

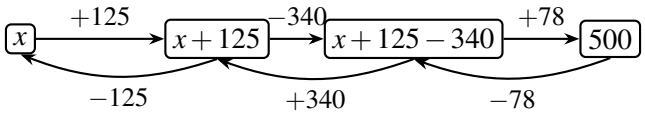
Marți: $1\,245 - 318 = 927$ pâini; în total: $1\,245 + 927 = 2\,172$ pâini.



Metoda mersului invers

M-am gândit la un număr. L-am mărit cu 125, apoi am scăzut 340 din rezultat, am adunat 78 și am obținut 500. La ce număr m-am gândit?
Rezolvare. Parcurgem operațiile de la sfârșit spre început, înlocuind fiecare operație cu operația

inversă:



Înainte de ultima adunare aveam $500-78=422$; înainte de scădere aveam $422+340=762$; numărul inițial este $762-125=637$.

Verificare: $637+125-340+78=500$. ✓

Diferența a două sume

Calculați $D=(2+4+6+\ldots+100)-(1+3+5+\ldots+99)$.
Rezolvare. Ambele sume au câte 50 de termeni. Grupăm fiecare termen par cu termenul impar de dinaintea lui:

$$D=(2-1)+(4-3)+(6-5)+\ldots+(100-99)=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\text{50 termeni}}=50.$$