Matematică, clasa a V-a. Operații cu numere naturale

Lecția 3. Probleme care se rezolvă cu adunări și scăderi

Termenul necunoscut, inegalități, metoda figurativă și probleme de aritmetică

Autor: Prof. Micu Elena

Acest material este publicat sub licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0): poate fi distribuit gratuit, cu indicarea autorului și a sursei, fără modificări și fără scop comercial.

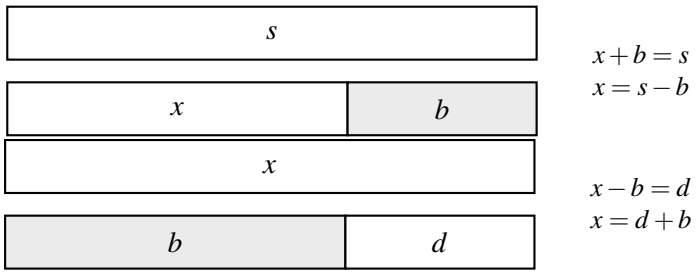
1. Aflarea termenului necunoscut

Multe probleme se reduc la o egalitate în care un număr este necunoscut; îl notăm cu o literă, de obicei x. Regulile de aflare a lui x vin direct din legătura dintre adunare și scădere.

Regulile termenului necunoscut

$x+b=s \;\Rightarrow\; x=s-b$ (termenul unei sume = suma minus celălalt termen)
$x-b=d \;\Rightarrow\; x=d+b$ (descăzutul = diferența plus scăzătorul)
$a-x=d \;\Rightarrow\; x=a-d$ (scăzătorul = descăzutul minus diferența)

După aflarea lui x, se face **verificarea**: înlocuim valoarea găsită în egalitatea inițială.



Egalități simple

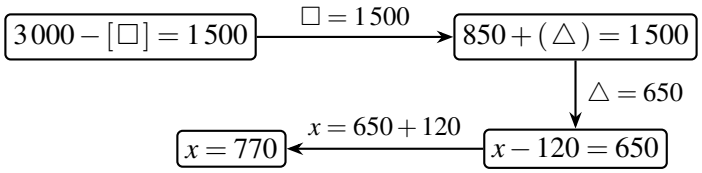
a) $x+348=1\,000$. $x=1\,000-348=652$. Verificare: $652+348=1\,000$. ✓
b) $x-275=1\,125$. $x=1\,125+275=1\,400$. Verificare: $1\,400-275=1\,125$. ✓
c) $2\,500-x=1\,730$. $x=2\,500-1\,730=770$. Verificare: $2\,500-770=1\,730$. ✓

Egalități cu paranteze

Când x se află într-o paranteză, privim mai întâi paranteza ca pe un singur număr necunoscut, o aflăm, apoi aflăm pe x. Lucrăm *din exterior spre interior*, strat cu strat.

Strat cu strat

Aflați x din $3\,000-[850+(x-120)]=1\,500$.
Rezolvare. Paranteza dreaptă este scăzător: $850+(x-120)=3\,000-1\,500=1\,500$. Paranteza rotundă este termen al unei sume: $x-120=1\,500-850=650$. În sfârșit, x este descăzut: $x=650+120=770$.
Verificare. $x-120=650$; $850+650=1\,500$; $3\,000-1\,500=1\,500$. ✓



Simplificați înainte de a rezolva

Dacă x apare într-un șir de adunări și scăderi fără paranteze, reduceți mai întâi termenii cunoscuți: $140 + x - 65 + 25 = 300$ devine $x + 100 = 300$. Dacă apar paranteze care nu îl conțin pe x, calculați-le de la început.

2. Inegalități cu termen necunoscut

Păstrarea inegalității

O inegalitate se păstrează dacă adunăm sau scădem același număr în ambii membri. De aceea, x se izolează la fel ca într-o egalitate:

$$x + b \leqslant s \;\Rightarrow\; x \leqslant s - b; \qquad x - b \geqslant d \;\Rightarrow\; x \geqslant d + b; \qquad a - x \leqslant d \;\Rightarrow\; x \geqslant a - d.$$

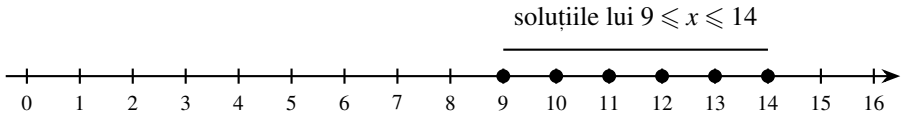
Soluția nu este un singur număr, ci **o mulțime de numere**; o scriem explicit (de exemplu $x \in \{0,1,2,3\}$) sau prin condiții ($x \geqslant 12$).

Semnul se întoarce la scăzător

În $a - x \leqslant d$, cu cât x este mai mare, cu atât $a - x$ este mai mic. De aceea, din $a - x \leqslant d$ rezultă $x \geqslant a - d$ (sensul se schimbă). Verificați întotdeauna cu un exemplu numeric: $10 - x \leqslant 7$ este adevărată pentru $x = 3, 4, 5, \ldots$, deci $x \geqslant 3$. Nu uitați nici condiția ca scăderea să existe: $x \leqslant a$.

Inegalități

a) $x + 17 < 25$. Scădem 17: $x < 8$, deci $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 7\}$.
b) $x - 9 \leqslant 4$. Adunăm 9: $x \leqslant 13$; în plus $x \geqslant 9$ (ca $x - 9$ să existe). Deci $x \in \{9, 10, 11, 12, 13\}$.
c) $40 - x \geqslant 28$. Rezultă $x \leqslant 40 - 28 = 12$, deci $x \in \{0, 1, \ldots, 12\}$.
d) $15 \leqslant x + 6 \leqslant 20$. Scădem 6 din toți cei trei membri: $9 \leqslant x \leqslant 14$, deci $x \in \{9, 10, \ldots, 14\}$.



Condiții simultane

Determinați numerele naturale x pentru care $x + 35 \leqslant 80$ și $120 - x \leqslant 90$.
Rezolvare. Din prima: $x \leqslant 45$. Din a doua: $x \geqslant 120 - 90 = 30$. Numerele care le verifică pe amândouă sunt $x \in \{30, 31, \ldots, 45\}$, adică 16 numere.

3. Metoda figurativă: sumă și diferență

Când o problemă vorbește despre două mărimi legate prin „cu atât mai mult” sau „cu atât mai puțin”, le reprezentăm prin segmente (bare). Desenul arată imediat ce trebuie adunat sau scăzut.

Două numere cu suma S și diferența D

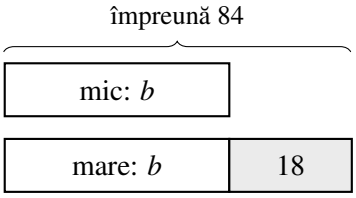
Dacă a este numărul mare și b cel mic, cu $a+b=S$ și $a-b=D$, atunci

$$b=(S-D):2, \qquad a=(S+D):2 \quad (\text{sau } a=b+D).$$

Explicație: scoțând diferența D din sumă rămân două părți egale cu b; adăugând D la sumă rămân două părți egale cu a.

Sumă și diferență

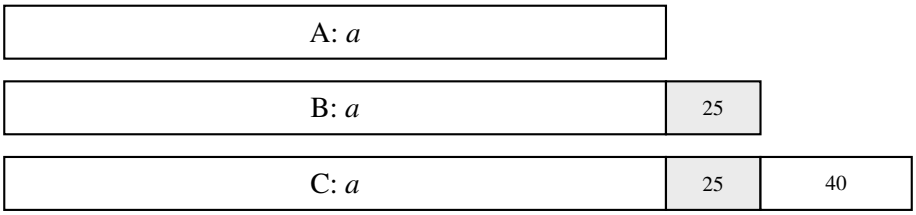
Doi frați au împreună 84 de timbre, iar cel mare are cu 18 timbre mai multe decât cel mic. Câte timbre are fiecare?



Rezolvare. Dacă scoatem cele 18 timbre în plus, rămân două părți egale: $84-18=66$, deci fratele mic are $66:2=33$ de timbre, iar cel mare $33+18=51$. Verificare: $33+51=84$. ✓

Trei mărimi legate în lanț

Trei clase au strâns împreună 615 kg de hârtie. Clasa a V-a B a strâns cu 25 kg mai mult decât clasa a V-a A, iar clasa a V-a C cu 40 kg mai mult decât clasa a V-a B. Cât a strâns fiecare clasă?



Rezolvare. Exprimăm totul prin cantitatea a a clasei A: B are $a+25$, iar C are $a+25+40=a+65$. Suma este $a+(a+25)+(a+65)=3a+90=615$, deci $3a=525$ și $a=175$. Așadar A: 175 kg, B: 200 kg, C: 240 kg. Verificare: $175+200+240=615$. ✓

4. Probleme cu sume date două câte două

Sume două câte două

Trei numere naturale a, b, c verifică $a+b=53$, $b+c=61$ și $a+c=46$. Aflați numerele.
Rezolvare. Adunăm cele trei egalități membru cu membru: fiecare număr apare de două ori, deci $2(a+b+c)=53+61+46=160$ și $a+b+c=80$. Acum fiecare număr se obține scăzând suma celorlalte două: $c=80-53=27$, $a=80-61=19$, $b=80-46=34$. Verificare: $19+34=53$, $34+27=61$, $19+27=46$. ✓

5. Probleme cu vârste

Ce se păstrează în timp

Diferența dintre vârstele a două persoane este **aceeași** în orice moment: peste n ani sau în urmă cu n ani, ambele vârste se schimbă cu același n. Suma vârstelor a k persoane crește cu $k \cdot n$ în n ani.

Vârste

Tatăl are 41 de ani, iar fiul 13. a) Peste câți ani suma vârstelor lor va fi 70? b) Cu câți ani în urmă tatăl avea de cinci ori vârsta fiului?
Rezolvare. a) Suma actuală este 54; ea crește cu 2 în fiecare an. Trebuie să crească cu $70-54=16$, deci peste $16:2=8$ ani. (Verificare: $49+21=70$.)
b) Diferența de vârstă este $41-13=28$ și nu se schimbă. Când tatăl avea de cinci ori vârsta fiului, diferența era de 4 ori vârsta fiului: $4v=28$, deci fiul avea $v=7$ ani, adică în urmă cu $13-7=6$ ani. (Verificare: $35=5\cdot 7$.)

6. Probleme cu cifre

Scrierea după valoarea cifrelor

Un număr se descompune după ordinele cifrelor: $\overline{ab}=10a+b$, $\overline{abc}=100a+10b+c$, $\overline{abcd}=10\cdot\overline{abc}+d=1\,000a+\overline{bcd}$. Răsturnatul lui $\overline{ab}$ este $\overline{ba}=10b+a$. Consecințe utile:

$$\overline{ab}+\overline{ba}=11\cdot(a+b), \qquad \overline{ab}-\overline{ba}=9\cdot(a-b)\ \ (a\geqslant b).$$

Număr și răsturnat

Aflați numerele de două cifre care sunt cu 45 mai mari decât răsturnatele lor.
Rezolvare. $\overline{ab}-\overline{ba}=9\cdot(a-b)=45$, deci $a-b=5$. Cifrele trebuie să fie nenule (ambele numere au două cifre): $(a,b)\in\{(6,1),(7,2),(8,3),(9,4)\}$, adică numerele 61, 72, 83, 94. Verificare: $61-16=45$. ✓

Alipirea unei cifre

Aflați numărul $\overline{abc}$ știind că $\overline{abc5}=\overline{abc}+2\,906$.
Rezolvare. $\overline{abc5}=10\cdot\overline{abc}+5$, deci $10\cdot\overline{abc}+5=\overline{abc}+2\,906$. Scădem $\overline{abc}$ și 5 din ambii membri: $9\cdot\overline{abc}=2\,901$, deci $\overline{abc}=2\,901:9=\ldots$ Împărțirea nu este exactă ($9\cdot 322=2\,898$, $9\cdot 323=2\,907$), deci **nu există** un astfel de număr. Problema arată că verificarea împărțirii face parte din rezolvare. Dacă în locul lui 2 906 am avea 2 903, am obține $9\cdot\overline{abc}=2\,898$ și $\overline{abc}=322$.

7. Modificarea unei sume sau a unei diferențe

Cum se schimbă rezultatul

- Dacă un termen al sumei crește cu m, suma crește cu m; dacă scade cu m, suma scade cu m. Modificările termenilor se cumulează.
- Dacă descăzutul crește cu m, diferența crește cu m; dacă scăzătorul crește cu m, diferența **scade** cu m. Dacă ambii cresc cu același m, diferența nu se schimbă.

Diferență modificată

Diferența a două numere este 1 250. Ce devine diferența dacă descăzutul crește cu 320, iar scăzătorul scade cu 130?
Rezolvare. $(a+320)-(b-130)=a+320-b+130=(a-b)+450=1\,250+450=1\,700$.

 Licență CC BY-NC-ND 4.0

8. Șiruri cu pas constant

Termenul de pe locul k

Într-un șir în care fiecare termen se obține din cel dinainte adunând același număr r (pasul sau rația), termenul de pe locul k este

$$t_k = t_1 + (k-1)\cdot r.$$

Un număr N este termen al șirului dacă $N \geqslant t_1$ și $N - t_1$ se împarte exact la r; locul lui este $(N-t_1) : r + 1$. Suma primilor k termeni se calculează cu metoda perechilor: $(t_1 + t_k)\cdot k : 2$.

Șir

Fie șirul $4, 11, 18, 25, \ldots$ a) Aflați al 30-lea termen. b) Este 2026 termen al șirului? c) Calculați suma primilor 30 de termeni.
Rezolvare. Pasul este 7. a) $t_{30} = 4 + 29\cdot 7 = 207$. b) $2026 - 4 = 2022$ și $2022 : 7 = 288$ rest 6; împărțirea nu este exactă, deci 2026 nu este termen. c) $(4 + 207)\cdot 30 : 2 = 211\cdot 15 = 3165$.

 Licență CC BY-NC-ND 4.0