Matematică, clasa a V-a. Operații cu numere naturale

Lecția 4. Înmulțirea numerelor naturale

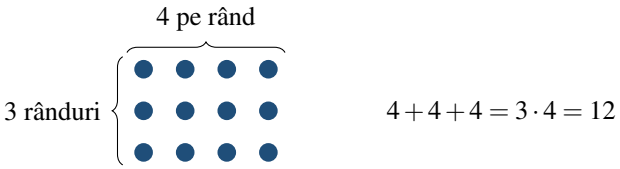
Definiție, proprietăți, distributivitate și factor comun, tehnici de calcul, aplicații

Autor: Prof. Micu Elena

Acest material este publicat sub licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0): poate fi distribuit gratuit, cu indicarea autorului și a sursei, fără modificări și fără scop comercial.

1. Ce este înmulțirea

Într-o cutie de bomboane sunt 3 rânduri a câte 4 bomboane. Putem număra bomboanele adunând: $4+4+4=12$. Înmulțirea este tocmai această adunare repetată, scrisă pe scurt: $3\cdot 4=12$.



Definiție și denumiri

Pentru numerele naturale a și b, cu $a\neq 0$, produsul $a\cdot b$ este suma a a termeni egali cu b:

$$a\cdot b=\underbrace{b+b+\ldots+b}_{a\text{ termeni}}.$$

Prin convenție, $0\cdot b=0$. Operația prin care se obține produsul se numește **înmulțire**.

$$a\ \cdot\ b\ =\ p \qquad a,\ b-\textbf{factorii}; \qquad p-\textbf{produsul}.$$

Produsul a două numere naturale este întotdeauna un număr natural: înmulțirea este peste tot definită pe $\mathbb{N}$. Semnul înmulțirii se scrie „$\cdot$” sau „$\times$”; între o literă și un număr sau între două litere se poate omite: $3a$ înseamnă $3\cdot a$, iar ab înseamnă $a\cdot b$.

2. Înmulțirea în scris

Înmulțim deînmulțitul cu fiecare cifră a înmulțitorului, începând cu unitățile; fiecare produs parțial se scrie deplasat cu un ordin spre stânga (pentru că înmulțim cu zeci, cu sute etc.), apoi produsele parțiale se adună.

$$\begin{array}{r} 3\,074\ \times \\ 206 \\ \hline 18\,444 \\ 6\,148 \\ \hline 633\,244 \end{array}$$

6 unități: $6\cdot 3\,074=18\,444$
0 zeci: rândul este 0 – se poate sări
2 sute: $2\cdot 3\,074=6\,148$, scris cu două ordine spre stânga
adunăm: $18\,444+614\,800=633\,244$

Înmulțirea cu 10, 100, 1 000 și cu numere care se termină în zerouri

A înmulți cu 10, 100, 1 000 înseamnă a adăuga la dreapta numărului unul, două, trei zerouri: $47\cdot 100=4\,700$. Pentru factori care se termină în zerouri, înmulțim numerele „fără zerouri” și adăugăm la rezultat toate zerourile: $360\cdot 2\,500=36\cdot 25$ urmat de trei zerouri $=900\,000$.

3. Proprietățile înmulțirii

Proprietățile înmulțirii

P$_1$. Asociativitatea: $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{N}$.
Într-un produs cu mai mulți factori, rezultatul nu depinde de modul în care grupăm factorii; de aceea scriem simplu $a\cdot b\cdot c$.

P$_2$. Comutativitatea: $a\cdot b = b\cdot a$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{N}$.
Produsul nu se schimbă dacă schimbăm ordinea factorilor.

P$_3$. Elementul neutru: există $1\in\mathbb{N}$ astfel încât $a\cdot 1 = 1\cdot a = a$, oricare ar fi $a\in\mathbb{N}$.
Numărul 1 este element neutru la înmulțire.

P$_4$. Distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere: oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{N}$,

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c, \qquad a\cdot(b-c) = a\cdot b - a\cdot c \ \ (b\geqslant c),$$

$$(b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a, \qquad (b-c)\cdot a = b\cdot a - c\cdot a \ \ (b\geqslant c).$$

Observații. 1) $a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$, oricare ar fi $a\in\mathbb{N}$. 2) Dacă $a\cdot b = 0$, atunci $a = 0$ sau $b = 0$ (un produs de numere naturale este nul numai dacă cel puțin un factor este nul).

Comutativitatea, în imagine

Aceeași rețea de puncte, privită pe rânduri sau pe coloane:



3 rânduri de câte 5: $3\cdot 5$

5 rânduri de câte 3: $5\cdot 3$

Același număr de puncte, deci $3\cdot 5 = 5\cdot 3 = 15$.

De ce contează proprietățile

Comutativitatea și asociativitatea ne lasă să schimbăm ordinea și să grupăm factorii cum dorim. Căutăm perechi care dau numere rotunde: $2\cdot 5 = 10$, $4\cdot 25 = 100$, $8\cdot 125 = 1\,000$, $20\cdot 50 = 1\,000$.

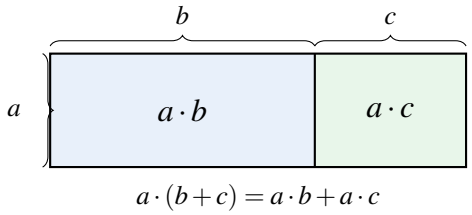
Grupări convenabile

a) $4\cdot 739\cdot 25 = (4\cdot 25)\cdot 739 = 100\cdot 739 = 73\,900$.
b) $125\cdot 61\cdot 8 = (125\cdot 8)\cdot 61 = 1\,000\cdot 61 = 61\,000$.
c) $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 50 = (2\cdot 5)\cdot(3\cdot 7)\cdot 50 = 10\cdot 21\cdot 50 = 21\cdot 500 = 10\,500$.

 Licență CC BY-NC-ND 4.0

4. Distributivitatea. Factorul comun

Un dreptunghi cu lățimea a și lungimea $b+c$ poate fi tăiat în două dreptunghiuri; aria întregului este suma ariilor părților.



$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

Scoaterea factorului comun

Citite de la dreapta la stânga, egalitățile din P_4 exprimă **scoaterea factorului comun**: oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{N}$,

$$a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c),\qquad a\cdot b-a\cdot c=a\cdot(b-c)\ \ (b\geqslant c).$$

Numărul a, care apare în fiecare termen, se numește **factor comun**. Un termen egal cu factorul comun se scrie ca produs cu 1: $a\cdot b+a=a\cdot b+a\cdot 1=a\cdot(b+1)$.

Distributivitatea în calcul rapid

a) $37\cdot 102=37\cdot(100+2)=3\,700+74=3\,774$.
b) $64\cdot 99=64\cdot(100-1)=6\,400-64=6\,336$.
c) $58\cdot 11=58\cdot(10+1)=580+58=638$.

Factor comun

a) $43\cdot 76+43\cdot 24=43\cdot(76+24)=43\cdot 100=4\,300$.
b) $517\cdot 38-517\cdot 28=517\cdot(38-28)=517\cdot 10=5\,170$.
c) $29\cdot 15+29\cdot 35-29=29\cdot(15+35-1)=29\cdot 49=1\,421$.
d) $6m+6n-18=6\cdot(m+n-3)$; $x\cdot y+x=x\cdot(y+1)$; $3a+6b+9c=3\cdot(a+2b+3c)$.

Calcul fără a afla necunoscutele

Se știe că $m+n=17$ și $n-p=5$. Calculați $4m+9n-5p$.
Rezolvare. Descompunem $9n=4n+5n$ ca să apară sumele cunoscute: $4m+9n-5p=4m+4n+5n-5p=4\cdot(m+n)+5\cdot(n-p)=4\cdot 17+5\cdot 5=68+25=93$.

Greșeala clasică

$a\cdot(b+c)$ **nu** este $a\cdot b+c$: factorul a se înmulțește cu **fiecare** termen din paranteză. Corect: $7\cdot(20+3)=140+21=161$. Greșit: $140+3=143$. Verificați calculând și în paranteză: $7\cdot 23=161$.

5. Înmulțirea și relațiile de egalitate și de ordine

Înmulțirea și relațiile de egalitate și de ordine

Oricare ar fi numerele naturale a, b, c, d:

R_1. dacă $a=b$, atunci $a\cdot c=b\cdot c$ (*o egalitate se păstrează dacă înmulțim ambii membri cu același număr*);

R_2. dacă $a=b$ și $c=d$, atunci $a\cdot c=b\cdot d$ (*egalitățile se înmulțesc membru cu membru*);

 Licență CC BY-NC-ND 4.0

R$_3$. dacă $a \leqslant b$, atunci $a \cdot c \leqslant b \cdot c$ (*o inegalitate nestrictă se păstrează dacă înmulțim ambii membri cu același număr natural*);

R$_4$. dacă $a < b$ și $c \neq 0$, atunci $a \cdot c < b \cdot c$ (*o inegalitate strictă se păstrează dacă înmulțim ambii membri cu același număr natural nenul*);

R$_5$. dacă $a \leqslant b$ și $c \leqslant d$, atunci $a \cdot c \leqslant b \cdot d$ (*inegalitățile de același sens se înmulțesc membru cu membru*);

R$_6$. dacă $a < b$ și $c < d$, atunci $a \cdot c < b \cdot d$.

Regula simplificării: dacă $a \cdot c = b \cdot c$ și $c \neq 0$, atunci $a = b$.

Observație. Inegalitățile de sensuri contrare ($a \leqslant b$ și $c \geqslant d$) **nu** se înmulțesc membru cu membru. Proprietățile R$_3$–R$_6$ au loc și pentru relațiile „$>$” și „$\geqslant$”.

Înmulțirea cu zero strică ordinea strictă

Din $3 < 5$ nu rezultă $3 \cdot 0 < 5 \cdot 0$ (ambele produse sunt 0). De aceea, la inegalități stricte „$<$” înmulțim numai cu numere nenule. La fel, din $a \cdot c = b \cdot c$ nu putem deduce $a = b$ dacă $c = 0$: $4 \cdot 0 = 9 \cdot 0$.

Comparare prin înmulțire

Comparați $A = 2024 \cdot 2026$ și $B = 2025 \cdot 2025$.
Rezolvare. $A = 2024 \cdot (2025+1) = 2024 \cdot 2025 + 2024$ și $B = (2024+1) \cdot 2025 = 2024 \cdot 2025 + 2025$. Cei doi termeni $2024 \cdot 2025$ sunt egali, iar $2024 < 2025$, deci $A < B$ (cu 1 mai mic).

6. Tehnici de calcul rapid

Reguli utile

- Înmulțirea cu 5: înmulțim cu 10 și împărțim la 2: $86 \cdot 5 = 860 : 2 = 430$.
- Înmulțirea cu 25: înmulțim cu 100 și împărțim la 4: $48 \cdot 25 = 4\,800 : 4 = 1\,200$.
- Înmulțirea cu 11: $a \cdot 11 = a \cdot 10 + a$: $73 \cdot 11 = 730 + 73 = 803$.
- Înmulțirea cu 9, 99, 999: $a \cdot 99 = a \cdot 100 - a$: $46 \cdot 99 = 4\,600 - 46 = 4\,554$.
- Dublăm un factor și înjumătățim celălalt: $16 \cdot 35 = 8 \cdot 70 = 560$.

7. Cu câte zerouri se termină un produs

Un zero la sfârșitul unui număr provine dintr-un factor $10 = 2 \cdot 5$. Într-un produs, numărăm perechile $(2,5)$ care se pot forma din factori; factorii 2 sunt mai mulți decât factorii 5, deci numărul zerourilor este dat de numărul factorilor 5.

Regula pentru produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

Numărul zerourilor cu care se termină produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ se obține astfel: împărțim n la 5 și reținem câtul; împărțim acest cât la 5 și reținem noul cât; continuăm până când câtul devine 0. **Numărul zerourilor este suma câturilor obținute.**
Explicație: primul cât numără multiplii lui 5 (fiecare aduce un factor 5); al doilea cât numără multiplii lui 25, care aduc câte un factor 5 în plus; și așa mai departe.

Zerouri finale

a) Cu câte zerouri se termină $P = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 20$?
Rezolvare. $20 : 5 = 4$ (rest 0); $4 : 5 = 0$ (rest 4). Suma câturilor: 4. Deci P se termină cu 4 zerouri. (Direct: factorii 5 provin din 5, 10, 15, 20.)
b) Cu câte zerouri se termină $Q = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 130$?
Rezolvare. $130 : 5 = 26$; $26 : 5 = 5$ (rest 1); $5 : 5 = 1$; $1 : 5 = 0$ (rest 1). Suma câturilor: $26+5+1 = 32$ de zerouri.

8. Probleme

Produs și condiție suplimentară

Numerele naturale a și b au produsul 360, iar $(a+4) \cdot (b-3) = 360$. Aflați numerele.
Rezolvare. Desfacem parantezele cu distributivitatea: $(a+4) \cdot (b-3) = a \cdot b - 3a + 4b - 12$. Înlocuim $a \cdot b = 360$: $360 - 3a + 4b - 12 = 360$, de unde $4b = 3a + 12 = 3 \cdot (a+4)$. Deci $3 \cdot (a+4)$ se împarte exact la 4; cum 3 nu se împarte la 4, $a+4$ se împarte exact la 4, adică a este multiplu de 4. Scriem 360 ca produs cu primul factor multiplu de 4 și verificăm $4b = 3a + 12$:

a	4	8	12	20	24	36	40
$b = 360 : a$	90	45	30	18	15	10	9
$4b$	360	180	120	72	60	40	36
$3a + 12$	24	36	48	72	84	120	132

Singura potrivire este $a = 20$, $b = 18$. Verificare: $24 \cdot 15 = 360$. ✓

Alipirea unei cifre

Aflați numărul $\overline{abc}$ și cifra d știind că $\overline{abc} \cdot d = \overline{2abc}$.
Rezolvare. $\overline{2abc} = 2000 + \overline{abc}$, deci $\overline{abc} \cdot d = 2000 + \overline{abc}$; scădem $\overline{abc} = \overline{abc} \cdot 1$: $\overline{abc} \cdot (d-1) = 2000$. Scriem 2000 ca produs dintre un număr de trei cifre și o cifră: $2000 = 250 \cdot 8 = 400 \cdot 5 = 500 \cdot 4$ ($1000 \cdot 2$ și $200 \cdot 10$ nu convin: 1000 are patru cifre, 10 nu este cifră). Deci $(\overline{abc}, d) \in \{(250,9), (400,6), (500,5)\}$. Verificare: $250 \cdot 9 = 2250$. ✓

 Licență CC BY-NC-ND 4.0