Matematică, clasa a V-a. Operații cu numere naturale

Lecția 6. Teorema împărțirii cu rest

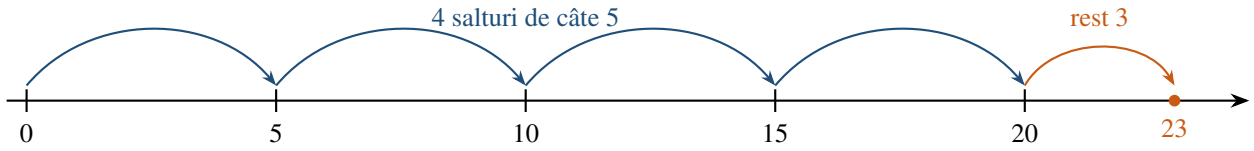
Cât și rest, proba împărțirii, probleme cu resturi

Autor: Prof. Micu Elena

Acest material este publicat sub licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0): poate fi distribuit gratuit, cu indicarea autorului și a sursei, fără modificări și fără scop comercial.

1. Împărțirea cu rest

Nu orice împărțire se face exact. Dacă avem 23 de mere și le punem în pungi de câte 5, umplem 4 pungi și rămân 3 mere: $23 = 5 \cdot 4 + 3$. Numărul 4 este **câtul**, iar 3 este **restul**. Restul este neapărat mai mic decât 5: dacă ar rămâne 5 sau mai multe mere, am mai putea umple o pungă.



Teorema împărțirii cu rest

Oricare ar fi numerele naturale a și b, cu $b \neq 0$, există și sunt unice numerele naturale c și r astfel încât

$$a = b \cdot c + r \qquad \text{și} \qquad 0 \leqslant r < b.$$

Numerele se numesc: a – **deîmpărțitul**, b – **împărțitorul**, c – **câtul**, r – **restul**. Pe scurt: $D = \hat{I} \cdot C + R,\ R < \hat{I}$.

Două condiții, nu una

Egalitatea $a = b \cdot c + r$ singură nu determină câtul și restul: $100 = 6 \cdot 8 + 52 = 6 \cdot 10 + 40 = 6 \cdot 16 + 4$. Numai scrierea în care restul este **mai mic decât împărțitorul** este cea din teoremă: câtul împărțirii lui 100 la 6 este 16, iar restul este 4. Verificați întotdeauna condiția $r < b$!

Cum scriem corect

Scrierea „$23 : 5 = 4$ rest 3” **nu este corectă**, deoarece $23 : 5$ nu este un număr natural. Scriem $23 = 5 \cdot 4 + 3$, $3 < 5$, sau spunem: „câtul împărțirii lui 23 la 5 este 4, iar restul este 3”. Când restul este 0 spunem că împărțirea este **exactă** (nu „fără rest”) și scriem $a : b = c$.

Proba împărțirii și cazuri particulare

- Egalitatea $a = b \cdot c + r$ este și **proba** împărțirii: înmulțim câtul cu împărțitorul și adunăm restul; trebuie să obținem deîmpărțitul.
- Dacă $a < b$, atunci câtul este 0 și restul este a: $4 = 11 \cdot 0 + 4$.
- $a : a = 1$ $(a \neq 0)$; $a : 1 = a$; $0 : a = 0$ $(a \neq 0)$; $a : 0$ nu are sens.
- Resturile posibile la împărțirea cu b sunt $0, 1, 2, \ldots, b-1$ – exact b resturi.

Cât și rest

a) $275 : 11$: $11 \cdot 25 = 275$, deci câtul este 25, restul 0 – împărțire exactă: $275 : 11 = 25$.
b) $124 : 5$: $5 \cdot 24 = 120$, $124 - 120 = 4 < 5$: câtul 24, restul 4; $124 = 5 \cdot 24 + 4$.

c) $4:11$: $4<11$, deci câtul 0, restul 4; $4=11\cdot 0+4$.

2. Aflarea unui termen din relația $D=\hat{I}\cdot C+R$

Deîmpărțitul

Aflați numărul care împărțit la 17 dă câtul 23 și restul 11.
Rezolvare. $11<17$, deci datele sunt corecte. $D=17\cdot 23+11=391+11=402$.

Toate numerele cu un cât dat

Aflați toate numerele naturale care împărțite la 7 dau câtul 13.
Rezolvare. $D=7\cdot 13+R=91+R$, unde restul R poate fi $0,1,2,3,4,5,6$. Numerele sunt $91,92,93,94,95,96,97$ – șapte numere.

Câtul legat de rest

Aflați toate numerele naturale care împărțite la 23 dau câtul egal cu dublul restului, apoi calculați suma lor.
Rezolvare. $D=23\cdot C+R$ cu $C=2R$ și $R<23$: $D=23\cdot 2R+R=46R+R=47R$, pentru $R=0,1,\ldots,22$. Numerele sunt $0,47,94,\ldots,47\cdot 22$. Suma: $47\cdot(0+1+2+\ldots+22)=47\cdot\dfrac{22\cdot 23}{2}=47\cdot 253=11\,891$.

Împărțitorul necunoscut

Un număr natural împărțit la un număr de două cifre dă câtul 72 și restul 98. Aflați numărul.
Rezolvare. Restul 98 trebuie să fie mai mic decât împărțitorul, care are două cifre: singurul împărțitor posibil este 99. $D=99\cdot 72+98=7\,128+98=7\,226$.

3. Resturi și scrieri de forma $b\cdot k+r$

Pentru a afla restul împărțirii unei expresii la b, o scriem sub forma $b\cdot(\ldots)+r$ cu $r<b$; teorema garantează că acel r este restul.

Restul unei expresii

Fie a, b numere naturale. Aflați restul împărțirii numărului $x=12a+8b+30$ la 4.
Rezolvare. $12a=4\cdot 3a$, $8b=4\cdot 2b$, $30=28+2=4\cdot 7+2$. Deci $x=4\cdot(3a+2b+7)+2$ și $2<4$: restul este 2 (nu depinde de a și b).

Resturi care se contrazic

Există numere naturale care împărțite la 6 dau restul 3 și împărțite la 3 dau restul 2?
Rezolvare. Dacă $n=6c+3$, atunci $n=3\cdot 2c+3=3\cdot(2c+1)$, deci n se împarte exact la 3: restul împărțirii lui n la 3 este 0, nu 2. Un număr are un singur rest la împărțirea cu 3 (teorema afirmă unicitatea), deci nu există astfel de numere.

Reducere la absurd

Un număr natural n împărțit la 35 dă restul 7. Arătați că restul împărțirii lui n la 21 nu poate fi 6.
Rezolvare. $n=35c+7=7\cdot(5c+1)$, deci n se împarte exact la 7. Presupunem că restul la 21 este 6: $n=21q+6=7\cdot 3q+6$, de unde restul împărțirii lui n la 7 ar fi $6\neq 0$ – contradicție. Presupunerea este falsă.

 Licență CC BY-NC-ND 4.0

4. Resturi și criteriile de divizibilitate

Criteriile de divizibilitate din lecția precedentă spun mai mult decât „se împarte exact sau nu”: ele dau chiar **restul** împărțirii, tot fără a efectua împărțirea.

Restul fără împărțire

- Restul împărțirii unui număr la 2, la 5 sau la 10 este restul împărțirii **ultimei cifre** la 2, 5, respectiv 10: $\overline{abc} = 10 \cdot \overline{ab} + c$, iar $10 \cdot \overline{ab}$ se împarte exact la 2, 5, 10.
- Restul împărțirii unui număr la 4, la 25 sau la 100 este restul împărțirii numărului format din **ultimele două cifre**.
- Restul împărțirii unui număr la 3 sau la 9 este restul împărțirii **sumei cifrelor** la 3, respectiv 9: $\overline{abc} = 9 \cdot (11a + b) + (a + b + c)$.

Resturi rapide

Pentru $n = 7358$: ultima cifră 8 – restul la 5 este 3, la 10 este 8, la 2 este 0; ultimele două cifre $58 = 4 \cdot 14 + 2$ – restul la 4 este 2, la 25 este 8; suma cifrelor $7+3+5+8 = 23 = 9 \cdot 2 + 5 = 3 \cdot 7 + 2$ – restul la 9 este 5, la 3 este 2. Verificare: $7358 = 9 \cdot 817 + 5$. ✓

Câtul egal cu restul

Calculați suma tuturor numerelor naturale care împărțite la 12 dau câtul egal cu restul.
Rezolvare. $n = 12 \cdot R + R = 13R$, cu $R \in \{0, 1, \ldots, 11\}$. Suma: $13 \cdot (0 + 1 + \ldots + 11) = 13 \cdot 66 = 858$.

Algoritmul în scris, cu rest

$4157 : 13 = 319$	
39	În 41, 13 se cuprinde de 3 ori: 39, rest 2; coborâm 5.
25	În 25 se cuprinde o dată: 13, rest 12; coborâm 7.
13	În 127 se cuprinde de 9 ori: 117, rest $10 < 13$.
127	Câtul este 319, restul 10: $4157 = 13 \cdot 319 + 10$.
117	Proba: $13 \cdot 319 = 4147$, $4147 + 10 = 4157$. ✓
10	

Observație. Scriem „$4157 : 13 = 319$” numai ca antet al calculului în scris; rezultatul se exprimă prin egalitatea $4157 = 13 \cdot 319 + 10$.

5. Câturi care se simplifică

Reguli utile

Când împărțirile sunt exacte: $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$; $a : (b \cdot c) = (a : b) : c$; $(a \cdot c) : (b \cdot c) = a : b$ (tăiem factorul comun sau același număr de zerouri).

Sume împărțite

a) $(1 + 2 + \ldots + 300) : 903$: $1 + 2 + \ldots + 300 = \dfrac{300 \cdot 301}{2} = 150 \cdot 301 = 50 \cdot 3 \cdot 301 = 50 \cdot 903$, deci câtul este 50.
b) $(8 + 16 + \ldots + 344) : (4 + 8 + \ldots + 172)$: fiecare termen de sus este dublul celui de jos, deci suma de sus = 2·(suma de jos); câtul este 2.