

Lecția 1. Noțiunea de permutare

Fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ o mulțime finită cu n elemente distincte, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Definiție (Noțiunea de permutare)

Se numește **permutare** a mulțimii A orice mulțime ordonată formată cu toate elementele acesteia.

O permutare a mulțimii A se poate scrie sub forma $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$, unde indicii $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ formează o reordonare (rearanjare) a mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$.

Se observă că această permutare este descrisă în mod unic de o funcție bijectivă $f: A \rightarrow A$, definită prin legea: $f(a_k) = a_{i_k}$, $(\forall) k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Această descriere funcțională poate fi reprezentată în mod sugestiv sub forma unui tablou biliniar (numit și *tabloul Cauchy al permutării*):

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k & \dots & a_n \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_k} & \dots & a_{i_n} \end{pmatrix}$$

Informația din acest tablou este structurată astfel:

- Prima linie: conține elementele mulțimii A scrise în ordinea lor inițială (canonică);
- A doua linie: conține valorile corespunzătoare ale funcției f , adică elementele lui A reordonate conform funcției bijective f .

Reducerea la mulțimea de indici și mulțimea S_n

Deoarece natura specifică a elementelor mulțimii $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ nu influențează proprietățile algebrice ale permutărilor, funcției $f: A \rightarrow A$ i se asociază în mod natural funcția bijectivă pe mulțimea indicilor:

$$\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}, \quad \sigma(k) = i_k, \quad (\forall) k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Această funcție se reprezintă sub tabloul simplificat:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & \dots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(k) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Dat fiind că funcția σ este bijectivă, valorile $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k), \dots, \sigma(n)$ sunt toate elementele mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$ distincte două câte două.

Observație

Studiul permutărilor oricărei mulțimi finite A de cardinal n este echivalent cu studiul permutărilor mulțimii numerelor naturale $M_n = \{1, 2, \dots, n\}$, adică a funcțiilor bijective $\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

Mulțimea S_n și cardinalul acesteia

Mulțimea tuturor permutărilor de grad n (adică a permutărilor mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$) se notează cu S_n .

Teorema 1 (Cardinalul mulțimii S_n)

Numărul total de permutări de grad n este dat de produsul primelor n numere naturale nenule:

$$|S_n| = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Demonstrație combinatorică

O permutare $\sigma \in S_n$ este determinată unic de valorile din imaginea sa, $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$.

- Pentru valoarea $\sigma(1)$ există n alegeri posibile din mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$;
- Pentru valoarea $\sigma(2)$ există $n - 1$ alegeri posibile (deoarece σ este injectivă, deci $\sigma(2) \neq \sigma(1)$);
- Pentru valoarea $\sigma(3)$ există $n - 2$ alegeri posibile; ...
- Pentru ultimul element $\sigma(n)$ rămâne o singură alegere posibilă.

Conform regulii produsului, numărul total de funcții bijective este:

$$|S_n| = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 1 = n!.$$

Studiul detaliat al permutărilor de grade mici ($n = 1, 2, 3$)

Să analizăm structura mulțimii S_n pentru primele valori ale lui n :

a) Pentru $n = 1$, $A = \{1\}$ și $|S_1| = 1!$, iar $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

b) Pentru $n = 2$, $A = \{1, 2\}$ și $|S_2| = 2!$, iar $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

c) Pentru $n = 3$, mulțimea $A = \{1, 2, 3\}$ și $|S_3| = 3! = 6$. Cele 6 elemente distincte ale lui S_3 sunt:

$$S_3 = \left\{ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Permutări particulare de gradul n

În studiul algebric al permutărilor, două tipuri de permutări joacă un rol fundamental:

Permutarea identică

Definiție (Permutarea identică)

Permutarea $e \in S_n$ definită prin: $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & n \end{pmatrix}$ se numește **permutarea identică de gradul n** . Aceasta lasă toate elementele neschimbate: $e(k) = k$, pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Transpoziții

Definiție (Transpoziție)

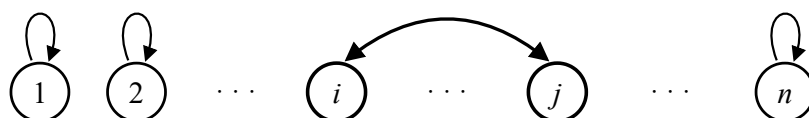
Fie $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ cu $i \neq j$. Permutarea $\delta_{ij} \in S_n$ (notată uneori și (i, j)) de forma:

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

care schimbă între ele doar elementele i și j , lăsând toate celelalte elemente neschimbate, se numește **transpoziție**.

Formulată explicit prin lege de corespondență, transpoziția τ_{ij} acționează astfel:

$$\delta_{ij}(k) = \begin{cases} j, & \text{dacă } k = i, \\ i, & \text{dacă } k = j, \\ k, & \text{dacă } k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i, j\}. \end{cases}$$



Schiță intuitivă a acțiunii unei transpoziții τ_{ij} .

Elementele i și j se schimbă între ele, iar restul elementelor rămân fixe.

Proprietăți fundamentale ale transpozițiilor

1) **Simetria:** $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, pentru orice $i \neq j$.

- 2) **Involuția (Proprietatea de auto inversabilitate):** Aplicată de două ori succesiv, o transpoziție revine la starea inițială: $\delta_{ij}^2 = \delta_{ij} \circ \delta_{ij} = e \implies \delta_{ij}^{-1} = \delta_{ij}$.
- 3) **Numărul de transpoziții distincte:** În mulțimea S_n există exact $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ transpoziții distincte.

Sinteză Teoretică

Noțiune	Notăție	Descriere / Proprietate Cheie
Permutare a mulțimii A	$f: A \rightarrow A$	Funcție bijectivă definită pe o mulțime finită de cardinal n .
Mulțimea permutărilor	S_n	Mulțimea tuturor permutărilor de grad n . Număr elemente: $ S_n = n!$.
Permutarea identică	$e \in S_n$	$e(k) = k, (\forall) k \in \{1, \dots, n\}$.
Transpoziție	$\delta_{ij} \in S_n$	Schimbă $i \leftrightarrow j$ și lasă fixe celelalte elemente. $\delta_{ij}^2 = e$.

Bibliografie

Burtea, M., & Burtea, G. (2006). *Matematică: Manual pentru clasa a XI-a: Trunchi comun + curriculum diferențiat: M1*. Editura Carminis.