Prof. Micu Elena
Micu Elena

Probleme speciale. Geometrie plană
Clasa a VI-a
Unghiuri formate în jurul unui punct – rezolvări

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este publicat sub licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0): poate fi distribuit gratuit, cu indicarea autorului și a sursei, fără modificări și fără scop comercial.

Problema 1 (Concursul „Stroe Belloescu”, 2026)

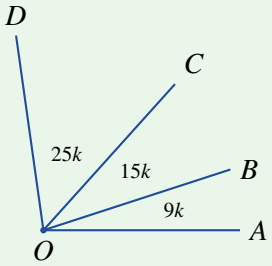
Fie $\sphericalangle AOD = 98^\circ$ și $[OB$ și $[OC$ semidrepte incluse în interiorul $\sphericalangle AOD$, $[OC$ semidreaptă inclusă în interiorul $\sphericalangle BOD$, astfel încât $a \cdot \sphericalangle AOB = c \cdot \sphericalangle BOC$ și $b \cdot \sphericalangle BOC = c \cdot \sphericalangle COD$, unde a, b, c sunt numere prime care verifică relația $3a + 5 \cdot (3b + 7c) = 195$. Aflați $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COD$.

Rezolvare. **Aflăm numerele prime a, b, c.**
195 se împarte exact la 5 și $5 \cdot (3b + 7c)$ se împarte exact la 5, deci și $3a$ se împarte exact la 5. Cum 3 și 5 sunt prime între ele, a se împarte exact la 5, iar a este prim, deci $\mathbf{a = 5}$.
Atunci $15 + 5 \cdot (3b + 7c) = 195$, deci $5 \cdot (3b + 7c) = 180$, adică $3b + 7c = 36$.
$3b$ și 36 se împart exact la 3, deci și $7c$ se împarte exact la 3; cum 3 și 7 sunt prime între ele, c se împarte exact la 3, iar c este prim, deci $\mathbf{c = 3}$.
Din $3b + 21 = 36$ obținem $3b = 15$, deci $\mathbf{b = 5}$ (număr prim).

Altfel: $3a + 15b + 35c = 195$. Cum $a, b \geq 2$, avem $3a + 15b \geq 36$, deci $35c \leq 159$, adică $c \leq 3$, $c \in \{2, 3\}$. Pentru $c = 2$: membrul stâng se împarte exact la 3, membrul drept nu — fals. Deci $c = 3$, $a + 5b = 30$, de unde a se împarte exact la 5: $a = 5$, $b = 5$.

Aflăm unghiurile. Relațiile devin $5 \cdot \sphericalangle AOB = 3 \cdot \sphericalangle BOC$ și $5 \cdot \sphericalangle BOC = 3 \cdot \sphericalangle COD$, adică

$$\frac{\sphericalangle AOB}{3} = \frac{\sphericalangle BOC}{5}, \qquad \frac{\sphericalangle BOC}{3} = \frac{\sphericalangle COD}{5}.$$



Aducem la același numitor pentru $\sphericalangle BOC$ (15):

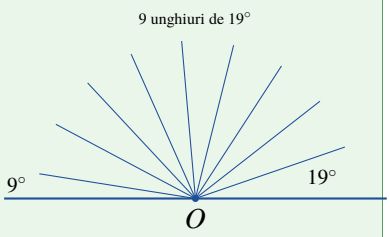
$$\frac{\sphericalangle AOB}{9} = \frac{\sphericalangle BOC}{15} = \frac{\sphericalangle COD}{25} = k.$$

Deci $\sphericalangle AOB = 9k$, $\sphericalangle BOC = 15k$, $\sphericalangle COD = 25k$. Semidreptele $[OB$ și $[OC$ sunt în interiorul $\sphericalangle AOD$, deci $9k + 15k + 25k = 98^\circ$, $49k = 98^\circ$, $k = 2^\circ$.
$\sphericalangle AOB = 18^\circ$, $\sphericalangle BOC = 30^\circ$, $\sphericalangle COD = 50^\circ$.
Verificare: $5 \cdot 18 = 90 = 3 \cdot 30$; $5 \cdot 30 = 150 = 3 \cdot 50$.

Problema 2 (auxiliarul de clasa a VI-a, Paralela 45, partea I)

Avem la dispoziție un șablon pentru construcția unui unghi cu măsura de 19°. a) Determinați un procedeu pentru construcția unui unghi cu măsura de 9°. b) Arătați că, folosind șablonul, putem construi unghiuri cu măsura exprimată în grade prin orice număr natural.

Rezolvare. a) Observăm că $19^\circ \cdot 9 = 171^\circ$, iar $180^\circ - 171^\circ = 9^\circ$.
Desenăm o dreaptă și un punct O pe ea. Cu șablonul, construim, pornind de la una dintre semidreptele dreptei, **9 unghiuri de câte** 19°, adiacente, unul după altul. Ele formează împreună un unghi de 171°. Unghiul rămas până la unghiul alungit are $180^\circ - 171^\circ = 9^\circ$.



b) $19^\circ \cdot 19 = 361^\circ$, iar $361^\circ - 360^\circ = 1^\circ$.
Construim în jurul unui punct O, cu șablonul, **19 unghiuri de câte** 19°, unul după altul. După un tur complet (360°), ultima latură trece cu 1° dincolo de prima latură: între ele se formează un unghi de 1°.
Având un unghi de 1°, putem construi un unghi de n° (pentru orice număr natural n) așezând n unghiuri de 1° unul după altul. Deci putem construi unghiuri cu măsura exprimată în grade prin orice număr natural.

Problema 3 (auxiliarul de clasa a VI-a, Paralela 45, partea I)

Se consideră n unghiuri în jurul unui punct, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, cu măsurile exprimate prin numere naturale nenule. Dacă, începând cu al doilea unghi, fiecare măsură a unghiului următor este cu 20° mai mare decât a unghiului precedent, determinați pe n și măsurile unghiurilor. Analizați toate cazurile posibile.

Rezolvare. Notăm măsura primului unghi cu a. Unghiurile au măsurile

$$u_1 = a, \quad u_2 = a + 20^\circ, \quad u_3 = a + 2 \cdot 20^\circ, \quad \ldots, \quad u_n = a + (n-1) \cdot 20^\circ.$$

Unghiurile sunt în jurul unui punct, deci suma lor este 360°:

$$a + (a + 20) + (a + 2 \cdot 20) + \ldots + [a + (n-1) \cdot 20] = 360,$$

$$n \cdot a + (1 + 2 + \ldots + (n-1)) \cdot 20 = 360.$$

Cum $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, avem $1 + 2 + \ldots + (n-1) = \dfrac{(n-1)n}{2}$, deci

$$n \cdot a + 10n(n-1) = 360, \qquad \text{adică} \qquad n \cdot [a + 10(n-1)] = 360.$$

Așadar n este un divizor al lui 360, iar $a = 360 : n - 10(n-1)$ trebuie să fie număr natural nenul.

n	calculul lui a	măsurile unghiurilor
3	$a + 10 \cdot 2 = 360 : 3 = 120$, $a = 100^\circ$	100°, 120°, 140°
4	$a + 10 \cdot 3 = 360 : 4 = 90$, $a = 60^\circ$	60°, 80°, 100°, 120°
5	$a + 10 \cdot 4 = 360 : 5 = 72$, $a = 32^\circ$	32°, 52°, 72°, 92°, 112°
6	$a + 10 \cdot 5 = 360 : 6 = 60$, $a = 10^\circ$	10°, 30°, 50°, 70°, 90°, 110°

Pentru $n \geq 7$: $10(n-1) \geq 60 > 360 : n$, deci a ar fi negativ — nu există soluții.
Concluzie: $n \in \{3, 4, 5, 6\}$, cu măsurile din tabel.