Capitolul 4. Puteri

Lecția 2. Reguli de calcul cu puteri

Calculele cu puteri devin mult mai simple dacă folosim câteva reguli. Le vom descoperi pornind de la definiția puterii, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$.

Înmulțirea puterilor care au aceeași bază

$$2^4 \cdot 2^3 = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{4 \text{ factori}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{3 \text{ factori}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{7 \text{ factori}} = 2^7 = 2^{4+3}$$

Regula 1

Dacă $a \in \mathbb{N}$ și $m, n \in \mathbb{N}$, atunci

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Pentru a înmulți două puteri cu aceeași bază, păstrăm baza și adunăm exponenții.

Exemple. $5^3 \cdot 5^6 = 5^9$; $3 \cdot 3^4 = 3^1 \cdot 3^4 = 3^5$; $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 = 2^{2+3+5} = 2^{10}$.

Împărțirea puterilor care au aceeași bază

$$3^5 : 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) : (3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 3^{5-2}$$

Regula 2

Dacă $a \in \mathbb{N}^*$, $m, n \in \mathbb{N}$ și $m \geq n$, atunci

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Pentru a împărți două puteri cu aceeași bază, păstrăm baza și scădem exponenții.

Exemple. $7^{10} : 7^4 = 7^6$; $10^9 : 10^6 = 10^3 = 1000$; $4^8 : 4^7 = 4^1 = 4$.

Observații

10. Pentru $m = n$, regula 2 dă $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$. Cum orice număr nenul împărțit la el însuși dă 1, obținem din nou $a^0 = 1$. Aceasta este explicația convenției $a^0 = 1$.
11. Regula 1 se aplică pentru oricâți factori: $a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$.

Puterea unei puteri

$$(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$$

Regula 3

Dacă $a, m, n \in \mathbb{N}$, atunci

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Pentru a ridica o putere la o altă putere, păstrăm baza și înmulțim exponenții.

Exemple. $(5^2)^3 = 5^6$; $(10^3)^4 = 10^{12}$; $(a^4)^5 = a^{20}$.

Observații

12. Scrierile $(a^m)^n$ și a^{m^n} sunt diferite. În a^{m^n} se calculează mai întâi m^n, apoi a la puterea obținută. De exemplu, $(2^3)^2 = 2^6 = 64$, dar $2^{3^2} = 2^9 = 512$.
13. Din regula 3 rezultă $(a^m)^n = (a^n)^m$, deoarece $m \cdot n = n \cdot m$. De exemplu, $(5^2)^3 = (5^3)^2 = 5^6$.

Puterea unui produs. Înmulțirea puterilor care au același exponent

$$(2 \cdot 5)^3 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 2^3 \cdot 5^3$$

Regula 4

Dacă $a, b, n \in \mathbb{N}$, atunci

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \text{și, citită invers,} \qquad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Pentru a ridica un produs la o putere, ridicăm fiecare factor la acea putere. Pentru a înmulți puteri cu același exponent, păstrăm exponentul și înmulțim bazele.

Exemple. $(3 \cdot 7)^4 = 3^4 \cdot 7^4$; $2^6 \cdot 5^6 = (2 \cdot 5)^6 = 10^6$; $(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

Împărțirea puterilor care au același exponent

Regula 5

Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$ și a se împarte exact la b, atunci

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

Pentru a împărți puteri cu același exponent, păstrăm exponentul și împărțim bazele.

Exemple. $15^7 : 5^7 = (15 : 5)^7 = 3^7$; $100^4 : 25^4 = 4^4 = 256$.

Aducerea la aceeași bază

Observații

14. Regulile 1 și 2 se aplică numai puterilor cu **aceeași bază**. Dacă bazele sunt diferite, încercăm să le scriem ca puteri ale aceluiași număr:

$$4 = 2^2,\ 8 = 2^3,\ 16 = 2^4,\ 32 = 2^5; \qquad 9 = 3^2,\ 27 = 3^3,\ 81 = 3^4; \qquad 25 = 5^2,\ 125 = 5^3.$$

De exemplu, $4^3 \cdot 2^5 = (2^2)^3 \cdot 2^5 = 2^6 \cdot 2^5 = 2^{11}$.

15. Nu există reguli pentru suma sau diferența puterilor! De exemplu, $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$, iar $24 \neq 2^7 = 128$. Analog, $(2+3)^2 = 25$, dar $2^2 + 3^2 = 13$.

Regula	**Formula**	**Pe scurt**
Înmulțirea, aceeași bază	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	baza rămâne, exponenții se adună
Împărțirea, aceeași bază	$a^m : a^n = a^{m-n}$	baza rămâne, exponenții se scad
Puterea unei puteri	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	baza rămâne, exponenții se înmulțesc
Același exponent, înmulțire	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	exponentul rămâne, bazele se înmulțesc
Același exponent, împărțire	$a^n : b^n = (a : b)^n$	exponentul rămâne, bazele se împart

Regulile citite de la dreapta la stânga

Fiecare regulă de calcul este o **egalitate**. O egalitate se poate citi în ambele sensuri: de la stânga la dreapta și de la dreapta la stânga. Citite invers, regulile ne permit să *descompunem* o putere sau să *grupăm* mai multe puteri, iar aceasta face multe calcule surprinzător de simple.

Regulile citite invers

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \qquad a^{m-n} = a^m : a^n \qquad a^{m\cdot n} = (a^m)^n = (a^n)^m$$
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad a^n : b^n = (a : b)^n$$

Observații

16. Despărțirea exponentului. Un exponent scris ca sumă ne permite să despărțim puterea într-un produs: $3^{n+2} = 3^n \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^n$; $2^{10} = 2^5 \cdot 2^5 = 32 \cdot 32 = 1024$.

17. Schimbarea bazei. Un exponent scris ca produs ne permite să schimbăm baza puterii: $2^{12} = (2^2)^6 = 4^6$, $2^{12} = (2^3)^4 = 8^4$, $2^{12} = (2^4)^3 = 16^3$, $2^{12} = (2^6)^2 = 64^2$. Astfel putem scrie aceeași putere cu exponentul dorit.

18. Gruparea bazelor. Puterile cu același exponent se grupează într-o singură putere. Sunt foarte utile grupările care dau puteri ale lui 10: $2 \cdot 5 = 10$, $4 \cdot 25 = 100$, $8 \cdot 125 = 1000$.

Exemple.

- $25^4 \cdot 4^4 = (25 \cdot 4)^4 = 100^4 = 10^8$ — fără a calcula 25^4 și 4^4!
- $36^5 : 9^5 = (36 : 9)^5 = 4^5 = 1024$.
- 2^{30} și 3^{20}: $2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10}$, $3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10}$, deci $2^{30} < 3^{20}$.
- $2^{10} \cdot 5^{12} = 2^{10} \cdot 5^{10} \cdot 5^2 = (2 \cdot 5)^{10} \cdot 25 = 25 \cdot 10^{10}$.

Exemple rezolvate

Exemplul 1. Calculați produsul $P = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{10}$.

Rezolvare. Conform regulii 1, adunăm exponenții: $P = 2^{1+2+\ldots+10}$. Cum $1+2+\ldots+10 = 55$, obținem $P = \boxed{2^{55}}$.

Exemplul 2. Calculați $8^5 \cdot 4^3 : 2^{20}$.

Rezolvare. Aducem la baza 2: $8^5 = (2^3)^5 = 2^{15}$ și $4^3 = (2^2)^3 = 2^6$. Atunci $2^{15} \cdot 2^6 : 2^{20} = 2^{21} : 2^{20} = 2^1 = \boxed{2}$.

Exemplul 3. Calculați $E = \left[(2^5)^3 : 2^{13} + 5^0\right]^2 : 5$.

Rezolvare. $(2^5)^3 = 2^{15}$ și $2^{15} : 2^{13} = 2^2 = 4$; $5^0 = 1$. Paranteza este $4 + 1 = 5$, deci $E = 5^2 : 5 = 25 : 5 = \boxed{5}$.

Exemplul 4. Câte cifre are numărul $N = 2^{12} \cdot 5^{10}$?

Rezolvare. Grupăm factorii 2 cu factorii 5 pentru a obține puteri ale lui 10: $N = 2^2 \cdot 2^{10} \cdot 5^{10} = 4 \cdot (2 \cdot 5)^{10} = 4 \cdot 10^{10}$. Numărul se scrie cu cifra 4 urmată de 10 zerouri, deci are $\boxed{11}$ cifre.

Exemplul 5. Fie $x \in \mathbb{N}$ și $a = 2^x$. Exprimați în funcție de a numerele 2^{x+3} și 4^x.

Rezolvare. $2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 = 8 \cdot a$; $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = a^2$.