# Capitolul 4. Puteri

Lecția 3. Împărțirea produselor de puteri

## Ce folosim din Lecția 2

$$a^m : a^n = a^{m-n} \ (m \geq n, \ a \neq 0) \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad a^n : b^n = (a : b)^n$$

În această lecție învățăm să împărțim un produs de puteri cu baze diferite la o putere sau la un alt produs de puteri.

## Împărțirea unui produs de puteri la o putere

Pentru a împărți un produs la un număr, este suficient să împărțim **un singur factor** (dacă acesta se împarte exact):

$$(8 \cdot 25) : 4 = 200 : 4 = 50 \qquad \text{și} \qquad (8 : 4) \cdot 25 = 2 \cdot 25 = 50.$$

La fel procedăm cu puterile: împărțim doar puterea care are **aceeași bază** cu împărțitorul.

$$(2^5 \cdot 3^4) : 2^3 = (2^5 : 2^3) \cdot 3^4 = 2^2 \cdot 3^4.$$

**Împărțirea la o putere**

Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$ și $x, y, z \in \mathbb{N}$, cu $x \geq z$, atunci

$$(a^x \cdot b^y) : a^z = a^{x-z} \cdot b^y$$

Puterea care nu are pereche în împărțitor rămâne neschimbată.

**Exemple.** $(3^{17} \cdot 5^{23}) : 3^2 = 3^{15} \cdot 5^{23}$; $(7^{11} \cdot 3^{15}) : 7^8 = 7^3 \cdot 3^{15}$; $(11^{10} \cdot 7^{12}) : 11^4 = 11^6 \cdot 7^{12}$.

## Împărțirea unui produs de puteri la un produs de puteri

Pentru a împărți un număr la un produs, îl împărțim pe rând la fiecare factor:

$$120 : (4 \cdot 5) = 120 : 20 = 6 \qquad \text{și} \qquad (120 : 4) : 5 = 30 : 5 = 6.$$

Așadar

$$(2^7 \cdot 5^{11}) : (2^3 \cdot 5^4) = \left[(2^7 \cdot 5^{11}) : 2^3\right] : 5^4 = (2^4 \cdot 5^{11}) : 5^4 = 2^4 \cdot 5^7.$$

**Împărțirea la un produs de puteri**

Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$, iar $x \geq m$ și $y \geq n$, atunci

$$(a^x \cdot b^y) : (a^m \cdot b^n) = (a^x : a^m) \cdot (b^y : b^n) = a^{x-m} \cdot b^{y-n}$$

Fiecare putere din deîmpărțit se împarte la puterea cu aceeași bază din împărțitor.

**Exemple.**

$$(13^{80} \cdot 17^{30}) : (13^{50} \cdot 17^{10}) = 13^{30} \cdot 17^{20};$$
$$(2^{113} \cdot 3^{250}) : (2^{100} \cdot 3^{200}) = 2^{13} \cdot 3^{50}.$$

## Produse cu trei sau mai multe puteri

Regulile se aplică la fel, oricâte puteri ar avea produsele.

**Trei sau mai multe puteri**

Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, iar exponenții sunt numere naturale pentru care împărțirile au sens, atunci

$$(a^m \cdot b^n \cdot c^p) : (a^x \cdot b^y) = a^{m-x} \cdot b^{n-y} \cdot c^p;$$
$$(a^m \cdot b^n \cdot c^p) : (a^x \cdot b^y \cdot c^z) = a^{m-x} \cdot b^{n-y} \cdot c^{p-z}.$$

**Exemple.**

$$(2^{50} \cdot 3^{45} \cdot 7^{100}) : (2^{28} \cdot 3^{15} \cdot 7^{90}) = 2^{22} \cdot 3^{30} \cdot 7^{10};$$
$$(2^{100} \cdot 3^{50} \cdot 7^{30}) : (2^{40} \cdot 3^{20}) = 2^{60} \cdot 3^{30} \cdot 7^{30}.$$

**Observații**

**19.** Dacă o putere se împarte la ea însăși, obținem $a^0 = 1$, deci acea putere „dispare" din rezultat. De exemplu, $(2^7 \cdot 3^5) : (2^7 \cdot 3^2) = 2^0 \cdot 3^3 = 3^3$.
**20.** Ordinea factorilor nu contează. În $(2^9 \cdot 5^4) : (5^2 \cdot 2^6)$ împărțim $2^9 : 2^6$ și $5^4 : 5^2$, obținând $2^3 \cdot 5^2$.
**21.** Împărțirea se face exact numai dacă fiecare bază din împărțitor apare și în deîmpărțit, cu un exponent cel puțin la fel de mare. De exemplu, $(2^3 \cdot 5^4) : (2^5 \cdot 5^2)$ nu se face exact, deoarece $2^3$ nu se împarte exact la $2^5$.
**22.** Nu împărțim puteri cu baze diferite! $2^8 : 3^2$ nu este $2^6$ și nici $(2 : 3)^6$. Fiecare putere se împarte numai la puterea cu aceeași bază.

## Descompunerea bazelor

Când bazele sunt numere ca 6, 12, 18 sau 100, le scriem întâi ca produse de puteri ale lui 2, 3, 5, 7, apoi aplicăm regula 4 din Lecția 2, $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $6 = 2 \cdot 3$ | $10 = 2 \cdot 5$ | $12 = 2^2 \cdot 3$ | $14 = 2 \cdot 7$ |
| $15 = 3 \cdot 5$ | $18 = 2 \cdot 3^2$ | $20 = 2^2 \cdot 5$ | $24 = 2^3 \cdot 3$ |
| $36 = 2^2 \cdot 3^2$ | $45 = 3^2 \cdot 5$ | $48 = 2^4 \cdot 3$ | $50 = 2 \cdot 5^2$ |
| $72 = 2^3 \cdot 3^2$ | $75 = 3 \cdot 5^2$ | $100 = 2^2 \cdot 5^2$ | $144 = 2^4 \cdot 3^2$ |

**Exemplu.** $18^{10} : (2^7 \cdot 3^4) = (2 \cdot 3^2)^{10} : (2^7 \cdot 3^4) = (2^{10} \cdot 3^{20}) : (2^7 \cdot 3^4) = 2^3 \cdot 3^{16}$.

## Exponenți care conțin litere

Regulile rămân aceleași; scădem exponenții chiar dacă aceștia conțin litere:

$$(2^{n+3} \cdot 3^{n+1}) : (2^n \cdot 3^n) = 2^{n+3-n} \cdot 3^{n+1-n} = 2^3 \cdot 3 = 24.$$

Rezultatul nu depinde de $n$. La fel, $6^{n+2} : (2^n \cdot 3^n) = (2^{n+2} \cdot 3^{n+2}) : (2^n \cdot 3^n) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$.

## Exemple rezolvate

**Exemplul 1.** Calculați $x = (7^3 \cdot 7^{10} \cdot 7^5)^4 : 49^{10}$.

*Rezolvare.* $(7^{18})^4 : (7^2)^{10} = 7^{72} : 7^{20} = \boxed{7^{52}}$.

**Exemplul 2.** Calculați $x = (7^4 \cdot 5^3 \cdot 3^7)^8 : (3^2 \cdot 7^2)^5 : 5^{3^{1^{2018}}}$.

*Rezolvare.* $(7^4 \cdot 5^3 \cdot 3^7)^8 = 7^{32} \cdot 5^{24} \cdot 3^{56}$; $(3^2 \cdot 7^2)^5 = 3^{10} \cdot 7^{10}$; $5^{3^{1^{2018}}} = 5^{3^1} = 5^3$.
$x = (7^{32} \cdot 5^{24} \cdot 3^{56}) : (3^{10} \cdot 7^{10}) : 5^3 = \boxed{7^{22} \cdot 5^{21} \cdot 3^{46}}$.

**Exemplul 3.** Calculați $(2^{12} \cdot 3^8 \cdot 5^6) : (2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^6)$.

*Rezolvare.* $2^{12-10} \cdot 3^{8-7} \cdot 5^{6-6} = 2^2 \cdot 3 \cdot 1 = \boxed{12}$.

**Exemplul 4.** Calculați $(12^5 \cdot 15^4) : (18^3 \cdot 10^4)$.

*Rezolvare.* Descompunem bazele: $12^5 = 2^{10} \cdot 3^5$, $15^4 = 3^4 \cdot 5^4$, $18^3 = 2^3 \cdot 3^6$, $10^4 = 2^4 \cdot 5^4$.

Deîmpărțitul este $2^{10} \cdot 3^9 \cdot 5^4$, iar împărțitorul este $2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^4$. Rezultatul: $2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = \boxed{216}$.

**Exemplul 5.** Calculați $(2^{n+4} \cdot 5^{n+2}) : 10^{n+1}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

*Rezolvare.* $10^{n+1} = 2^{n+1} \cdot 5^{n+1}$, deci rezultatul este $2^3 \cdot 5^1 = \boxed{40}$.

**Exemplul 6.** Aflați numărul natural $x$ pentru care $(3^x \cdot 5^{12}) : (3^4 \cdot 5^{10}) = 3^5 \cdot 25$.

*Rezolvare.* Membrul stâng este $3^{x-4} \cdot 5^2$, iar $25 = 5^2$. Atunci $3^{x-4} = 3^5$, deci $x - 4 = 5$ și $\boxed{x = 9}$.