Capitolul 4. Puteri

Lecția 3. Împărțirea produselor de puteri

Ce folosim din Lecția 2

$$a^m : a^n = a^{m-n} \ (m \geq n, \ a \neq 0) \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad a^n : b^n = (a : b)^n$$

În această lecție învățăm să împărțim un produs de puteri cu baze diferite la o putere sau la un alt produs de puteri.

Împărțirea unui produs de puteri la o putere

Pentru a împărți un produs la un număr, este suficient să împărțim **un singur factor** (dacă acesta se împarte exact):

$$(8 \cdot 25) : 4 = 200 : 4 = 50 \qquad \text{și} \qquad (8 : 4) \cdot 25 = 2 \cdot 25 = 50.$$

La fel procedăm cu puterile: împărțim doar puterea care are **aceeași bază** cu împărțitorul.

$$(2^5 \cdot 3^4) : 2^3 = (2^5 : 2^3) \cdot 3^4 = 2^2 \cdot 3^4.$$

Împărțirea la o putere

Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$ și $x, y, z \in \mathbb{N}$, cu $x \geq z$, atunci

$$(a^x \cdot b^y) : a^z = a^{x-z} \cdot b^y$$

Puterea care nu are pereche în împărțitor rămâne neschimbată.

Exemple. $(3^{17} \cdot 5^{23}) : 3^2 = 3^{15} \cdot 5^{23}$; $(7^{11} \cdot 3^{15}) : 7^8 = 7^3 \cdot 3^{15}$; $(11^{10} \cdot 7^{12}) : 11^4 = 11^6 \cdot 7^{12}$.

Împărțirea unui produs de puteri la un produs de puteri

Pentru a împărți un număr la un produs, îl împărțim pe rând la fiecare factor:

$$120 : (4 \cdot 5) = 120 : 20 = 6 \qquad \text{și} \qquad (120 : 4) : 5 = 30 : 5 = 6.$$

Așadar

$$(2^7 \cdot 5^{11}) : (2^3 \cdot 5^4) = \left[(2^7 \cdot 5^{11}) : 2^3\right] : 5^4 = (2^4 \cdot 5^{11}) : 5^4 = 2^4 \cdot 5^7.$$

Împărțirea la un produs de puteri

Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$, iar $x \geq m$ și $y \geq n$, atunci

$$(a^x \cdot b^y) : (a^m \cdot b^n) = (a^x : a^m) \cdot (b^y : b^n) = a^{x-m} \cdot b^{y-n}$$

Fiecare putere din deîmpărțit se împarte la puterea cu aceeași bază din împărțitor.

Exemple.

$$(13^{80} \cdot 17^{30}) : (13^{50} \cdot 17^{10}) = 13^{30} \cdot 17^{20};$$
$$(2^{113} \cdot 3^{250}) : (2^{100} \cdot 3^{200}) = 2^{13} \cdot 3^{50}.$$

Produse cu trei sau mai multe puteri

Regulile se aplică la fel, oricâte puteri ar avea produsele.

Trei sau mai multe puteri

Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, iar exponenții sunt numere naturale pentru care împărțirile au sens, atunci

$$(a^m \cdot b^n \cdot c^p) : (a^x \cdot b^y) = a^{m-x} \cdot b^{n-y} \cdot c^p;$$
$$(a^m \cdot b^n \cdot c^p) : (a^x \cdot b^y \cdot c^z) = a^{m-x} \cdot b^{n-y} \cdot c^{p-z}.$$

Exemple.

$$(2^{50} \cdot 3^{45} \cdot 7^{100}) : (2^{28} \cdot 3^{15} \cdot 7^{90}) = 2^{22} \cdot 3^{30} \cdot 7^{10};$$
$$(2^{100} \cdot 3^{50} \cdot 7^{30}) : (2^{40} \cdot 3^{20}) = 2^{60} \cdot 3^{30} \cdot 7^{30}.$$

Observații

19. Dacă o putere se împarte la ea însăși, obținem $a^0 = 1$, deci acea putere „dispare” din rezultat. De exemplu, $(2^7 \cdot 3^5) : (2^7 \cdot 3^2) = 2^0 \cdot 3^3 = 3^3$.

20. Ordinea factorilor nu contează. În $(2^9 \cdot 5^4) : (5^2 \cdot 2^6)$ împărțim $2^9 : 2^6$ și $5^4 : 5^2$, obținând $2^3 \cdot 5^2$.

21. Împărțirea se face exact numai dacă fiecare bază din împărțitor apare și în deîmpărțit, cu un exponent cel puțin la fel de mare. De exemplu, $(2^3 \cdot 5^4) : (2^5 \cdot 5^2)$ nu se face exact, deoarece 2^3 nu se împarte exact la 2^5.

22. Nu împărțim puteri cu baze diferite! $2^8 : 3^2$ nu este 2^6 și nici $(2 : 3)^6$. Fiecare putere se împarte numai la puterea cu aceeași bază.

Descompunerea bazelor

Când bazele sunt numere ca 6, 12, 18 sau 100, le scriem întâi ca produse de puteri ale lui 2, 3, 5, 7, apoi aplicăm regula 4 din Lecția 2, $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

$6 = 2 \cdot 3$	$10 = 2 \cdot 5$	$12 = 2^2 \cdot 3$	$14 = 2 \cdot 7$
$15 = 3 \cdot 5$	$18 = 2 \cdot 3^2$	$20 = 2^2 \cdot 5$	$24 = 2^3 \cdot 3$
$36 = 2^2 \cdot 3^2$	$45 = 3^2 \cdot 5$	$48 = 2^4 \cdot 3$	$50 = 2 \cdot 5^2$
$72 = 2^3 \cdot 3^2$	$75 = 3 \cdot 5^2$	$100 = 2^2 \cdot 5^2$	$144 = 2^4 \cdot 3^2$

Exemplu. $18^{10} : (2^7 \cdot 3^4) = (2 \cdot 3^2)^{10} : (2^7 \cdot 3^4) = (2^{10} \cdot 3^{20}) : (2^7 \cdot 3^4) = 2^3 \cdot 3^{16}$.

Exponenți care conțin litere

Regulile rămân aceleași; scădem exponenții chiar dacă aceștia conțin litere:

$$(2^{n+3} \cdot 3^{n+1}) : (2^n \cdot 3^n) = 2^{n+3-n} \cdot 3^{n+1-n} = 2^3 \cdot 3 = 24.$$

Rezultatul nu depinde de n. La fel, $6^{n+2} : (2^n \cdot 3^n) = (2^{n+2} \cdot 3^{n+2}) : (2^n \cdot 3^n) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$.

Exemple rezolvate

Exemplul 1. Calculați $x = (7^3 \cdot 7^{10} \cdot 7^5)^4 : 49^{10}$.

Rezolvare. $(7^{18})^4 : (7^2)^{10} = 7^{72} : 7^{20} = \boxed{7^{52}}$.

Exemplul 2. Calculați $x = (7^4 \cdot 5^3 \cdot 3^7)^8 : (3^2 \cdot 7^2)^5 : 5^{3^{1^{2018}}}$.

Rezolvare. $(7^4 \cdot 5^3 \cdot 3^7)^8 = 7^{32} \cdot 5^{24} \cdot 3^{56}$; $(3^2 \cdot 7^2)^5 = 3^{10} \cdot 7^{10}$; $5^{3^{1^{2018}}} = 5^{3^1} = 5^3$.

$x = (7^{32} \cdot 5^{24} \cdot 3^{56}) : (3^{10} \cdot 7^{10}) : 5^3 = \boxed{7^{22} \cdot 5^{21} \cdot 3^{46}}$.

Exemplul 3. Calculați $(2^{12} \cdot 3^8 \cdot 5^6) : (2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^6)$.

Rezolvare. $2^{12-10} \cdot 3^{8-7} \cdot 5^{6-6} = 2^2 \cdot 3 \cdot 1 = \boxed{12}$.

Exemplul 4. Calculați $(12^5 \cdot 15^4) : (18^3 \cdot 10^4)$.

Rezolvare. Descompunem bazele: $12^5 = 2^{10} \cdot 3^5$, $15^4 = 3^4 \cdot 5^4$, $18^3 = 2^3 \cdot 3^6$, $10^4 = 2^4 \cdot 5^4$.

Deîmpărțitul este $2^{10} \cdot 3^9 \cdot 5^4$, iar împărțitorul este $2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^4$. Rezultatul: $2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = \boxed{216}$.

Exemplul 5. Calculați $(2^{n+4} \cdot 5^{n+2}) : 10^{n+1}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

Rezolvare. $10^{n+1} = 2^{n+1} \cdot 5^{n+1}$, deci rezultatul este $2^3 \cdot 5^1 = \boxed{40}$.

Exemplul 6. Aflați numărul natural x pentru care $(3^x \cdot 5^{12}) : (3^4 \cdot 5^{10}) = 3^5 \cdot 25$.

Rezolvare. Membrul stâng este $3^{x-4} \cdot 5^2$, iar $25 = 5^2$. Atunci $3^{x-4} = 3^5$, deci $x - 4 = 5$ și $\boxed{x = 9}$.