Capitolul 4. Puteri

Lecția 4. Metoda factorului comun în calculul cu puteri

Distributivitatea citită de la dreapta la stânga

Știm că înmulțirea este distributivă față de adunare și față de scădere:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad a \cdot (b-c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

Ca și regulile de calcul cu puteri, aceste egalități se pot citi și de la dreapta la stânga. Când un număr apare ca factor în toți termenii unei sume, îl putem „scoate în fața parantezei".

Metoda factorului comun

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c) \qquad a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b-c)$$

Numărul a, care apare în toți termenii, se numește **factor comun**.

Exemple. Metoda simplifică mult calculele:

$37 \cdot 85 + 37 \cdot 15 = 37 \cdot (85+15) = 37 \cdot 100 = 3700;$ $\qquad 125 \cdot 47 - 125 \cdot 37 = 125 \cdot (47-37) = 125 \cdot 10 = 1250.$

Metoda se aplică și când termenii conțin litere: $3x + 3y = 3 \cdot (x+y)$; $a \cdot x + a \cdot y + a = a \cdot (x+y+1)$.

Observații

23. Când factorul comun este chiar un termen al sumei, scriem acel termen ca produs cu 1: $a = a \cdot 1$. De exemplu, $15 \cdot 7 + 15 = 15 \cdot 7 + 15 \cdot 1 = 15 \cdot (7+1)$. Nu uitați acest 1 în paranteză!
24. Putem verifica oricând rezultatul, înmulțind la loc factorul comun cu fiecare termen din paranteză.

Factorul comun într-o sumă de puteri

În sumele de puteri cu aceeași bază, factorul comun este o putere a acelei baze. Pentru a-l scoate, despărțim exponenții, folosind regula 1 citită de la dreapta la stânga: $a^{n+k} = a^n \cdot a^k$.

Exemplu. În suma $2^5 + 2^7 + 2^8$ toți termenii conțin factorul 2^5: $2^7 = 2^5 \cdot 2^2$ și $2^8 = 2^5 \cdot 2^3$. Atunci

$$2^5 + 2^7 + 2^8 = 2^5 \cdot 1 + 2^5 \cdot 2^2 + 2^5 \cdot 2^3 = 2^5 \cdot (1+4+8) = 13 \cdot 2^5.$$

Regulă

Într-o sumă sau diferență de puteri cu aceeași bază se scoate factor comun puterea cu exponentul cel mai mic. Fiecare termen se scrie ca produs, folosind

$$a^{n+k} = a^n \cdot a^k$$

Observații

25. Exponentul cel mai mic poate conține o literă. De exemplu, în $3^{n+2} + 3^{n+1} + 3^n$ exponentul cel mai mic este n:

$$3^{n+2} + 3^{n+1} + 3^n = 3^n \cdot 3^2 + 3^n \cdot 3 + 3^n \cdot 1 = 3^n \cdot (9+3+1) = 13 \cdot 3^n.$$

26. Factorul comun poate fi și un produs. De exemplu, $x^2 + x^3 + x^4 = x^2 \cdot (1 + x + x^2)$ și $3x^2y + 2xy^2 + 4xy = xy \cdot (3x + 2y + 4)$.
27. Metoda factorului comun se folosește: **a)** pentru a calcula rapid; **b)** pentru a arăta că un număr se împarte exact la un alt număr — după scoaterea factorului comun, numărul apare ca factor al produsului; **c)** pentru a simplifica împărțiri.

Exemple rezolvate

Exemplul 1. Scrieți ca produs numărul $2^{20} + 2^{21} + 2^{22}$.

Rezolvare. Exponentul cel mai mic este 20: $2^{20} \cdot (1 + 2 + 2^2) = 2^{20} \cdot (1 + 2 + 4) = \boxed{7 \cdot 2^{20}}$.

Exemplul 2. Scrieți ca produs numărul $5^{12} - 5^{11} - 5^{10}$.

Rezolvare. $5^{12} = 5^{10} \cdot 5^2$ și $5^{11} = 5^{10} \cdot 5$, deci $5^{10} \cdot (25 - 5 - 1) = \boxed{19 \cdot 5^{10}}$.

Exemplul 3. Calculați $(16 \cdot 12^{10} - 4 \cdot 12^{10}) : 12^{11}$.

Rezolvare. În paranteză, factorul comun este 12^{10}: $12^{10} \cdot (16 - 4) = 12^{10} \cdot 12 = 12^{11}$. Atunci $12^{11} : 12^{11} = \boxed{1}$.

Exemplul 4. Calculați $10^3 \cdot 85 - 10^3 \cdot 61 - 3000$.

Rezolvare. Scriem $3000 = 10^3 \cdot 3$. Atunci $10^3 \cdot (85 - 61 - 3) = 10^3 \cdot 21 = \boxed{21\,000}$.

Exemplul 5. Arătați că numărul $3^{n+2} + 3^{n+1} + 3^n$ se împarte exact la 13, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Rezolvare. Conform observației 25, numărul este egal cu $13 \cdot 3^n$. Fiind un produs în care unul dintre factori este 13, se împarte exact la 13.

Exemplul 6. Arătați că numărul $2^n \cdot 5^{n+1} + 10^{n+1} - 4 \cdot 10^n$ se împarte exact la 11, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Rezolvare. Scriem toți termenii cu factorul 10^n: $2^n \cdot 5^{n+1} = 2^n \cdot 5^n \cdot 5 = 10^n \cdot 5$ și $10^{n+1} = 10^n \cdot 10$. Numărul devine $10^n \cdot (5 + 10 - 4) = 11 \cdot 10^n$, deci se împarte exact la 11.