Fișă de aplicații

Lecția 5. Sume de puteri cu baza 2

Nivelul I — Înțelegere

1. Scrieți ca o singură putere: a) $2^3 + 2^3$; b) $2^7 + 2^7$; c) $2^{10} + 2^{10}$.
2. Calculați direct, apoi cu formula: a) $1 + 2 + 4 + 8$; b) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$.
3. Câți termeni are fiecare sumă? a) $1 + 2 + ... + 2^{20}$; b) $2 + 2^2 + ... + 2^{30}$; c) $2^5 + 2^6 + ... + 2^{40}$.
4. Stabiliți dacă afirmațiile sunt adevărate (A) sau false (F): a) $2^5 + 2^5 = 2^{10}$; b) $2^5 + 2^5 = 2^6$; c) $1 + 2 + ... + 2^7 = 2^8 - 1$; d) $2^4 + 2^4 + 2^4 + 2^4 = 2^6$.

Nivelul II — Aplicare

5. Calculați $S = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^9$.
6. Calculați $S = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{10}$.
7. Calculați $S = 2^4 + 2^5 + ... + 2^{12}$.
8. Scrieți ca o singură putere numărul $1 + 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{15}$.
9. Calculați $2^{20} - (1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{19})$.
10. Arătați că $(1 + 2 + ... + 2^{29}) + 1$ se poate scrie ca putere a lui 4 și ca putere a lui 8.
11. Comparați numerele $S = 1 + 2 + ... + 2^{60}$ și 2^{61}.

Nivelul III — Aprofundare

12. Arătați că $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{99}$ se împarte exact la 3.
13. Arătați că $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{29}$ se împarte exact la 7.
14. Arătați că $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{39}$ se împarte exact la 15.
15. Aflați numărul natural n pentru care $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 255$.
16. Aflați numărul natural n pentru care $2^n + 2^n = 1024$.
17. Aflați cel mai mic număr natural n pentru care $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n > 1000$.
18. Ana pune deoparte 1 leu în prima zi, 2 lei în a doua zi și, în fiecare zi următoare, de două ori mai mult decât în ziua precedentă. După câte zile are 511 lei? Câți lei pune deoparte în ultima zi?
19. Pe o tablă de șah se pune 1 bob de grâu pe primul pătrat, 2 boabe pe al doilea, 4 pe al treilea și așa mai departe. Câte boabe sunt în total pe primele 10 pătrate? Câte boabe sunt pe pătratul al 64-lea?
20. Scrieți ca sumă de puteri distincte ale lui 2 numerele: 37, 43, 100, 117.
21. Determinați numerele naturale $x > y$ pentru care $2^x + 2^y = 40$.
22. Determinați numerele naturale $x > y > z$ pentru care $2^x + 2^y + 2^z = 52$.
23. Scrieți numărul $2^8 - 1$ ca sumă de 8 puteri consecutive ale lui 2.
24. Aflați numărul natural n pentru care $2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 2^{31} - 2$.
25. Arătați că $2 \cdot (1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{30}) < 3^{31}$.
26. Arătați că $3 \cdot (1 + 4 + 4^2 + ... + 4^{20}) = 4^{21} - 1$.
27. Determinați numerele naturale $i < j < k$ pentru care $2^i + 2^j + 2^k = 328$.