Capitolul 4. Puteri

Lecția 5. Sume de puteri cu baza 2

Dublarea unei puteri a lui 2

Ce se întâmplă dacă adunăm o putere a lui 2 cu ea însăși? De exemplu,

$$2^3 + 2^3 = 8 + 8 = 16 = 2^4, \qquad 2^5 + 2^5 = 32 + 32 = 64 = 2^6.$$

Suma a două puteri egale ale lui 2 este puterea următoare a lui 2. Explicația folosește regula 1 de calcul cu puteri (Lecția 2): $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^1 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Dublarea

Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$,

$$2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

Observații

28. Atenție: $2^n + 2^n$ *nu* este egal cu 2^{2n} și nici cu 4^n. De exemplu, $2^3 + 2^3 = 16$, iar $2^6 = 64$.

29. Analog, $2^n + 2^n + 2^n + 2^n = 4 \cdot 2^n = 2^2 \cdot 2^n = 2^{n+2}$.

Suma $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n$

Să calculăm câteva sume de puteri consecutive ale lui 2, începând cu $2^0 = 1$:

Suma	**Valoarea**	**Comparăm cu puterea următoare**
1	1	$2^1 - 1$
$1 + 2$	3	$2^2 - 1$
$1 + 2 + 2^2$	7	$2^3 - 1$
$1 + 2 + 2^2 + 2^3$	15	$2^4 - 1$
$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$	31	$2^5 - 1$

Observăm că fiecare sumă este cu 1 mai mică decât puterea lui 2 care urmează după ultimul termen. Arătăm că acest lucru este adevărat întotdeauna.

Metoda I (prin dublări succesive). Fie $S = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n$. Adăugăm 1 și folosim de mai multe ori dublarea:

$$S + 1 = \underbrace{1 + 1}_{2} + 2 + 2^2 + ... + 2^n = \underbrace{2 + 2}_{2^2} + 2^2 + ... + 2^n$$
$$= \underbrace{2^2 + 2^2}_{2^3} + ... + 2^n = ... = 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

Așadar $S + 1 = 2^{n+1}$, deci $S = 2^{n+1} - 1$.

Metoda a II-a (înmulțim suma cu 2).

$$2 \cdot S = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n + 2^{n+1}, \qquad S = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n.$$

Scăzând, toți termenii de la 2 la 2^n se reduc și rămâne $2 \cdot S - S = 2^{n+1} - 1$, adică $S = 2^{n+1} - 1$.

Suma puterilor lui 2

Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Suma puterilor consecutive ale lui 2, de la 2^0 la 2^n, este cu 1 mai mică decât puterea următoare,

2^{n+1}.

Observații

30. Suma $1+2+2^2+...+2^n$ are $n+1$ termeni, deoarece exponenții sunt $0, 1, 2, ..., n$.
31. Dacă suma nu începe cu 1, procedăm la fel, înmulțind cu 2 și scăzând:

$$2^k + 2^{k+1} + ... + 2^n = 2^{n+1} - 2^k, \qquad k \leq n.$$

De exemplu, $2+2^2+...+2^{10} = 2^{11}-2$ și $2^3+2^4+...+2^{10} = 2^{11}-2^3$.
32. Grupări. Dacă numărul termenilor sumei $1+2+...+2^n$ se împarte exact la 2, grupăm termenii câte doi și fiecare grup are forma $2^j \cdot (1+2) = 3 \cdot 2^j$; deci suma se împarte exact la 3. Analog, dacă numărul termenilor se împarte exact la 3, suma se împarte exact la $1+2+4=7$; dacă se împarte exact la 4, suma se împarte exact la $1+2+4+8=15$.

Scrierea unui număr ca sumă de puteri ale lui 2

Orice număr natural nenul se poate scrie, într-un singur fel, ca sumă de puteri *distincte* ale lui 2. Pentru a găsi această scriere, procedăm astfel: scădem din număr cea mai mare putere a lui 2 care nu îl depășește, apoi repetăm cu restul obținut, până ajungem la 0.

Exemplu. $43 = 32+11$, $11 = 8+3$, $3 = 2+1$. Așadar $43 = 32+8+2+1 = 2^5+2^3+2^1+2^0$.

Observații

33. Scrierea ca sumă de puteri distincte ale lui 2 ne ajută să rezolvăm ecuații de forma $2^x + 2^y =$ număr dat, cu $x > y$. De exemplu, $2^x + 2^y = 24$: cum $24 = 16+8 = 2^4+2^3$, rezultă $x=4$ și $y=3$.

Sume de puteri cu altă bază

Aceeași idee — înmulțim suma cu baza și scădem suma inițială — funcționează pentru orice bază. Să calculăm, de exemplu,

$$S = 1+3+3^2+...+3^n.$$

Înmulțim suma cu baza 3:

$$3 \cdot S = 3+3^2+3^3+...+3^n+3^{n+1}.$$

Scădem din $3 \cdot S$ suma S. Toți termenii de la 3 la 3^n se reduc și rămâne

$$3 \cdot S - S = 3^{n+1} - 1.$$

În membrul stâng avem $3 \cdot S - S = 2 \cdot S$, deoarece 3 bucăți de S minus o bucată de S înseamnă 2 bucăți de S. Așadar

$$2 \cdot S = 3^{n+1} - 1.$$

Metoda

Pentru a calcula o sumă de puteri consecutive ale aceleiași baze:
1. notăm suma cu S;
2. înmulțim suma cu baza și scriem rezultatul ca sumă de puteri;
3. scădem suma inițială; termenii comuni se reduc și rămân doar primul și ultimul termen.

Observații

34. Când trebuie să calculăm un produs de forma $2 \cdot (1+3+...+3^n)$, scriem $2 = 3-1$: $2 \cdot S = (3-1) \cdot S = 3 \cdot S - S$. Analog, pentru baza 4 scriem $3 = 4-1$: $3 \cdot S = (4-1) \cdot S = 4 \cdot S - S$; pentru baza 5 scriem $4 = 5-1$: $4 \cdot S = 5 \cdot S - S$.

Exemplu. Arătați că $2 \cdot (1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{50}) < 3^{51}$.

Rezolvare. Notăm $S = 1 + 3 + ... + 3^{50}$ și scriem $2 = 3 - 1$: $2 \cdot S = (3 - 1) \cdot S = 3 \cdot S - S$.
$3 \cdot S = 3 + 3^2 + ... + 3^{50} + 3^{51}$, deci $3 \cdot S - S = 3^{51} - 1$. Așadar $2 \cdot S = 3^{51} - 1 < 3^{51}$.

Exemple rezolvate

Exemplul 1. Calculați $S = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{10}$.

Rezolvare. Ultimul exponent este 10, deci $S = 2^{11} - 1 = 2048 - 1 = \boxed{2047}$.

Exemplul 2. Calculați $S = 2^3 + 2^4 + ... + 2^{10}$.

Rezolvare. $2 \cdot S = 2^4 + 2^5 + ... + 2^{11}$. Scăzând: $2 \cdot S - S = 2^{11} - 2^3$, deci $S = 2048 - 8 = \boxed{2040}$.

Exemplul 3. Arătați că suma $S = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{99}$ se împarte exact la 3.

Rezolvare. Suma are 100 de termeni, un număr par. Grupăm termenii câte doi:

$$\begin{aligned} S &= (1 + 2) + 2^2 \cdot (1 + 2) + 2^4 \cdot (1 + 2) + ... + 2^{98} \cdot (1 + 2) \\ &= 3 \cdot (1 + 2^2 + 2^4 + ... + 2^{98}), \end{aligned}$$

deci S se împarte exact la 3.

Exemplul 4 (legenda tablei de șah). Inventatorul jocului de șah a cerut un bob de grâu pe primul pătrat al tablei, 2 boabe pe al doilea, 2^2 pe al treilea și așa mai departe, dublând numărul pe fiecare dintre cele 64 de pătrate. Câte boabe sunt pe ultimul pătrat? Câte boabe sunt în total?

Rezolvare. Pe pătratul k se află 2^{k-1} boabe, deci pe ultimul pătrat se află 2^{63} boabe. În total sunt $1 + 2 + ... + 2^{63} = \boxed{2^{64} - 1} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$ boabe — mult mai mult decât s-a recoltat vreodată pe întreaga planetă.