Capitolul 4. Puteri

Lecția 6. Compararea puterilor

Compararea a două puteri cu aceeași bază

Baza 0. $0^1 = 0^2 = 0^3 = ... = 0$: toate puterile cu baza 0 și exponent nenul sunt egale cu 0.

Baza 1. $1^0 = 1^1 = 1^2 = ... = 1$: toate puterile cu baza 1 sunt egale cu 1.

Baza cel puțin 2. De exemplu, $2^3 = 8 < 32 = 2^5$. Cu cât exponentul este mai mare, cu atât puterea este mai mare.

Aceeași bază

Dacă $a \geq 2$ și $m, n \in \mathbb{N}$, atunci

$$a^m > a^n \iff m > n, \qquad a^m < a^n \iff m < n, \qquad a^m = a^n \iff m = n.$$

Dintre două puteri cu aceeași bază (cel puțin 2), este mai mare cea cu exponentul mai mare.

Observații

35. Notația $p \iff q$ (se citește „p dacă și numai dacă q") înseamnă că din p rezultă q și din q rezultă p.

Exemple. $15^{27} < 15^{72}$; $26^{123} > 26^{24}$; $2017^8 > 2017^4$; $1^{5000} = 1^3$; $0^{1000} = 0^{20}$.

Compararea a două puteri cu același exponent

Dacă exponentul este 0, toate puterile cu baza nenulă sunt egale cu 1. Dacă exponentul este cel puțin 1, de exemplu $2^5 < 8^5$ și $10^7 < 23^7$.

Același exponent

Dacă $a, b \in \mathbb{N}$, $a \neq b$ și $m \geq 1$, atunci

$$a^m > b^m \iff a > b, \qquad a^m < b^m \iff a < b.$$

Dintre două puteri cu același exponent nenul, este mai mare cea cu baza mai mare.

Exemple. $7^{12} < 9^{12}$; $25^{40} > 18^{40}$.

Compararea a două puteri oarecare

Metode de comparare

a) aducem puterile la aceeași bază sau la același exponent;

b) încadrăm puterile între două puteri cu aceeași bază sau cu același exponent;

c) folosim factorul comun sau alte artificii de calcul.

Aceeași bază. 2^{48} și 64^3: $64^3 = (2^6)^3 = 2^{18}$, deci $2^{48} > 64^3$.

Același exponent. 2^{33} și 3^{22}: căutăm un divizor comun al exponenților, $33 = 3 \cdot 11$ și $22 = 2 \cdot 11$:

$$2^{33} = (2^3)^{11} = 8^{11}, \qquad 3^{22} = (3^2)^{11} = 9^{11}, \qquad \text{deci } 2^{33} < 3^{22}.$$

Încadrare. 31^{11} și 17^{14}: $31^{11} < 32^{11} = 2^{55} < 2^{56} = 16^{14} < 17^{14}$, deci $31^{11} < 17^{14}$.

Observații

36. Dacă $a < b$ și $c < d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{N}^*)$, atunci $a + c < b + d$ și $a \cdot c < b \cdot d$. Inegalitățile de același sens se pot aduna și înmulți.
37. Dacă $a > b \geq 1$ și $m > n$, atunci $a^m > b^n$: puterea cu baza mai mare și exponentul mai mare este mai mare.

Exemple rezolvate

Exemplul 1. Ordonați crescător 2^{45}, 3^{27}, 4^{18}.

Rezolvare. $2^{45} = (2^5)^9 = 32^9$, $3^{27} = (3^3)^9 = 27^9$, $4^{18} = (4^2)^9 = 16^9$, deci $\boxed{4^{18} < 3^{27} < 2^{45}}$.

Exemplul 2. Comparați 200^{30} și $8^{10} \cdot 10^{60}$.

Rezolvare. $200^{30} = (2 \cdot 10^2)^{30} = 2^{30} \cdot 10^{60} = 8^{10} \cdot 10^{60}$, deci $\boxed{200^{30} = 8^{10} \cdot 10^{60}}$.

Exemplul 3. Comparați 2^{61} cu 3^{41}, apoi $7 + 2^{61}$ cu $8 + 3^{41}$.

Rezolvare. $2^{61} = 2 \cdot (2^3)^{20} = 2 \cdot 8^{20}$ și $3^{41} = 3 \cdot (3^2)^{20} = 3 \cdot 9^{20}$. Din $2 < 3$ și $8^{20} < 9^{20}$ rezultă $\boxed{2^{61} < 3^{41}}$ (observația 36). Cum și $7 < 8$, prin adunare: $\boxed{7 + 2^{61} < 8 + 3^{41}}$.

Exemplul 4. Comparați $a = 5^{30} - 5^{29} - 5^{28}$ și $b = 2^{32} + 2^{29} + 2^{28}$.

Rezolvare. $a = 5^{28} \cdot (25 - 5 - 1) = 19 \cdot 5^{28}$, $b = 2^{28} \cdot (16 + 2 + 1) = 19 \cdot 2^{28}$. Cum $5^{28} > 2^{28}$, $\boxed{a > b}$.

Exemplul 5. Comparați $A = 2^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^{1985}$ și $B = (2^{993})^{1985}$.

Rezolvare. $A = 2^{1+2+\ldots+1985}$, iar $1 + 2 + \ldots + 1985 = 1985 \cdot 1986 : 2 = 1985 \cdot 993$. Deci $A = (2^{993})^{1985}$ și $\boxed{A = B}$.

Exemplul 6. Fie $a = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{299}$ și $b = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{199}$. Comparați $a + 1$ și $2 \cdot b + 1$.

Rezolvare. $2a - a = 2^{300} - 1$, deci $a + 1 = 2^{300} = 8^{100}$; $3b - b = 3^{200} - 1$, deci $2b + 1 = 3^{200} = 9^{100}$. Prin urmare $\boxed{a + 1 < 2b + 1}$.