Prof. Micu Elena
Micu Elena

Unghiuri opuse la vârf

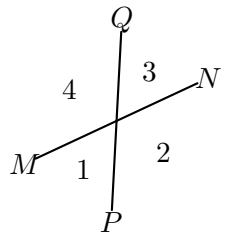
Clasa a VI-a

Material de studiu

1. Definiție

Definiție

Două unghiuri cu același vârf se numesc **unghiuri opuse la vârf** dacă laturile unuia sunt în prelungirea laturilor celuilalt (laturile lor sunt, două câte două, semidrepte opuse).



Dacă $MN \cap PQ = \{O\}$, atunci $\sphericalangle MOP$ și $\sphericalangle NOQ$ sunt opuse la vârf, la fel $\sphericalangle MOQ$ și $\sphericalangle NOP$. Două unghiuri opuse la vârf nu au latură comună.
Cele două drepte formează patru unghiuri: **două perechi** de unghiuri opuse la vârf și **patru perechi** de unghiuri adiacente suplementare.

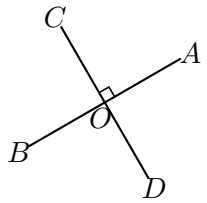
2. Teorema unghiurilor opuse la vârf

Teoremă

Două unghiuri opuse la vârf sunt congruente.

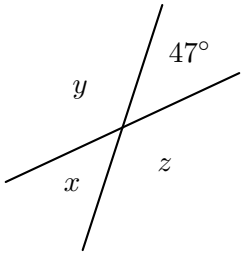
Demonstrație (figura de la secțiunea 1). $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 2$ sunt adiacente suplementare (față de MN), iar $\sphericalangle 3$ și $\sphericalangle 2$ sunt adiacente suplementare (față de PQ). Deci $m(\sphericalangle 1) = 180^\circ - m(\sphericalangle 2) = m(\sphericalangle 3)$, adică $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 3$. Analog, $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 4$. □

Consecință. Dacă unul dintre cele patru unghiuri are măsura a, unghiurile au, pe rând, măsurile a, $180^\circ - a$, a, $180^\circ - a$; suma lor este 360°.

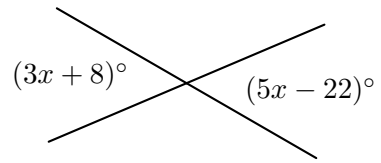


Reluare: drepte perpendiculare. Pentru $a = 90^\circ$, toate cele patru unghiuri sunt drepte: dreptele sunt **perpendiculare** ($AB \perp CD$). Pe desen se marchează un singur unghi drept.

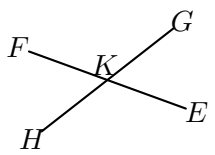
3. Exemple rezolvate



1. Aflați x, y, z.
$x = 47^\circ$ (opuse la vârf);
$y = 180^\circ - 47^\circ = 133^\circ$ (adiacente suplementare);
$z = y = 133^\circ$.

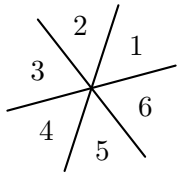


2. Aflați x.
Unghiurile sunt opuse la vârf: $3x + 8 = 5x - 22$, deci $x = 15$; fiecare are 53°.



3.
$m(\sphericalangle EKG) + m(\sphericalangle FKH) = 116^\circ$. Aflați cele patru unghiuri.
$\sphericalangle EKG \equiv \sphericalangle FKH$: câte 58°; celelalte au câte 122°.

4. Trei drepte concurente



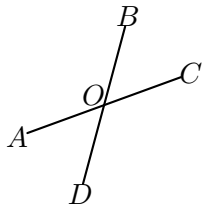
Se formează șase unghiuri; perechile de unghiuri opuse la vârf sunt $(\sphericalangle 1, \sphericalangle 4)$, $(\sphericalangle 2, \sphericalangle 5)$, $(\sphericalangle 3, \sphericalangle 6)$, iar trei unghiuri consecutive formează un unghi alungit: $m(\sphericalangle 1) + m(\sphericalangle 2) + m(\sphericalangle 3) = 180°$. De exemplu, dacă $m(\sphericalangle 1) = 57°$ și $m(\sphericalangle 2) = 56°$, atunci $m(\sphericalangle 3) = 67°$.

5. Reciproca teoremei

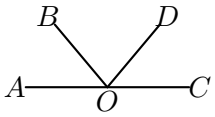
Atenție! Enunțul „două unghiuri congruente sunt opuse la vârf" este **fals** (de exemplu, două unghiuri adiacente congruente). Reciproca devine adevărată dacă știm că o pereche de laturi sunt semidrepte opuse:

Teorema reciprocă

Dacă $[OA$ și $[OC$ sunt semidrepte opuse, punctele B și D sunt de o parte și de alta a dreptei AC și $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$, atunci $[OB$ și $[OD$ sunt semidrepte opuse, adică punctele B, O, D sunt **coliniare**.



Demonstrație. $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente suplementare, deci $m(\sphericalangle BOC) = 180° - m(\sphericalangle AOB)$. Atunci $m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD) = 180° - m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle COD) = 180°$. Unghiurile $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COD$ sunt adiacente, iar suma măsurilor lor este 180°, deci $\sphericalangle BOD$ este alungit. □

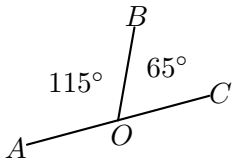


Condiția despre semiplane este necesară: dacă B și D sunt de aceeași parte a dreptei AC, unghiurile pot fi congruente fără ca B, O, D să fie coliniare.

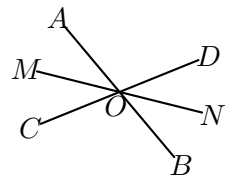
6. Cum demonstrăm cu unghiuri că trei puncte sunt coliniare

Pentru a arăta că punctele A, O, C sunt coliniare (cu O între A și C), arătăm că $\sphericalangle AOC$ este **alungit**. Cele mai folosite căi:

1. **Unghiuri adiacente cu suma** 180°**:** dacă $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente și $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) = 180°$, atunci A, O, C sunt coliniare. La fel pentru mai multe unghiuri adiacente consecutive.
2. **Reciproca unghiurilor opuse la vârf** (secțiunea 5).
3. **Perpendiculare în același punct:** dacă $OA \perp d$ și $OC \perp d$, cu A și C de o parte și de alta a dreptei d, atunci $m(\sphericalangle AOC) = 90° + 90° = 180°$.



Exemplul 1. $m(\sphericalangle AOB) = 115°$, $m(\sphericalangle BOC) = 65°$, unghiurile fiind adiacente. Atunci $m(\sphericalangle AOC) = 115° + 65° = 180°$, deci A, O, C sunt coliniare.



Exemplul 2. $AB \cap CD = \{O\}$, $[OM$ și $[ON$ sunt bisectoarele unghiurilor AOC și BOD. Arătați că M, O, N sunt coliniare. $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$ (opuse la vârf), deci $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle BON$ (jumătăți ale lor). $[OA$, $[OB$ sunt opuse, iar M, N sunt de o parte și de alta a dreptei AB; din reciprocă, M, O, N sunt coliniare.