Prof. Micu Elena
Micu Elena

Lecția 1

Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări

Geometrie în spațiu — clasa a VIII-a — Probleme rezolvate

I. Notații și simboluri

Problema 1. Citiți și explicați în cuvinte: a) $M \in a, N \notin a$; b) $a \subset \alpha$; c) $b \cap \alpha = \{P\}$; d) $\alpha \cap \beta = d$; e) $c \cap \alpha = \emptyset$.

Rezolvare. a) Punctul M aparține dreptei a (se află pe dreapta a), iar punctul N nu aparține dreptei a.
b) Dreapta a este inclusă în planul α: toate punctele dreptei a se află în planul α.
c) Dreapta b intersectează planul α într-un singur punct, P (dreapta „înțeapă" planul în P).
d) Planele α și β se intersectează după dreapta d: punctele comune celor două plane sunt exact punctele dreptei d.
e) Dreapta c și planul α nu au niciun punct comun.

Problema 2. Scrieți cu simboluri: a) punctul A se află în planul π, dar nu se află pe dreapta m; b) dreapta AB nu este inclusă în planul γ; c) dreptele a și b se intersectează în punctul O; d) planele (ABC) și (ABD) au în comun dreapta AB.

Rezolvare. a) $A \in \pi, A \notin m$; b) $AB \not\subset \gamma$; c) $a \cap b = \{O\}$; d) $(ABC) \cap (ABD) = AB$.

Problema 3. Precizați care dintre scrierile următoare sunt greșite și corectați-le: a) $d \in \alpha$; b) $A \subset d$; c) $\alpha \cap \beta = \{d\}$; d) $AB \cap \alpha = P$; e) $d \cap \alpha = \{\emptyset\}$.

Rezolvare. Toate scrierile sunt greșite.

- a) O dreaptă este o *submulțime* a planului, nu un element al lui: corect $d \subset \alpha$.
- b) Punctul este *element* al dreptei: corect $A \in d$ (sau $\{A\} \subset d$).
- c) Intersecția a două plane este o mulțime de puncte, adică dreapta însăși: corect $\alpha \cap \beta = d$.
- d) Intersecția unei drepte cu un plan este o mulțime: corect $AB \cap \alpha = \{P\}$.
- e) $\{\emptyset\}$ este o mulțime cu un element; mulțimea fără niciun element este $\emptyset$: corect $d \cap \alpha = \emptyset$.

II. Relații în corpurile geometrice

Problema 4. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ din figura 1. Completați cu unul dintre simbolurile $\in, \notin, \subset, \not\subset$ și justificați:

a) $C \ldots (ABD)$; b) $A' \ldots (ABC)$; c) $A'C' \ldots (A'B'C')$; d) $BB' \ldots (ABC)$; e) $DD' \ldots (ADD')$.

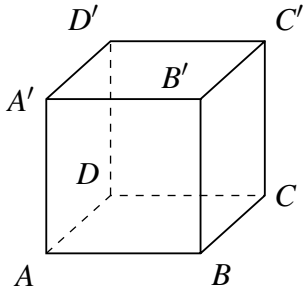


Figura 1: cubul $ABCDA'B'C'D'$

Rezolvare. a) Punctele A, B, D, C sunt vârfurile feței $ABCD$, deci planul (ABD) este planul bazei, iar $C \in (ABD)$.
b) A' este un vârf al feței de sus, care nu se află în planul bazei: $A' \notin (ABC)$.
c) A' și C' aparțin planului $(A'B'C')$, deci dreapta $A'C'$ este inclusă în acest plan: $A'C' \subset (A'B'C')$.
d) $B \in (ABC)$, dar $B' \notin (ABC)$, deci dreapta BB' nu este inclusă în planul (ABC): $BB' \not\subset (ABC)$ (ea „înțeapă" planul în B).
e) D și D' sunt vârfuri ale feței $ADD'A'$, deci $DD' \subset (ADD')$.

Problema 5. Pentru cubul din figura 1, determinați: a) $AB \cap BC$; b) $(ABC) \cap (BCC')$; c) $CC' \cap (ABC)$; d) $(ADD') \cap (A'B'C')$; e) $(ABB') \cap (DCC')$.

Rezolvare. a) Muchiile AB și BC au în comun vârful B: $AB \cap BC = \{B\}$.
b) Fețele $ABCD$ și $BCC'B'$ au în comun muchia BC; planele lor se intersectează după dreapta BC: $(ABC) \cap (BCC') = BC$.
c) Dreapta CC' are un singur punct în planul bazei, vârful C: $CC' \cap (ABC) = \{C\}$.
d) Fața laterală $ADD'A'$ și fața de sus $A'B'C'D'$ au în comun muchia $A'D'$: $(ADD') \cap (A'B'C') = A'D'$.
e) Fețele $ABB'A'$ și $DCC'D'$ sunt fețe opuse ale cubului; planele lor nu au puncte comune: $(ABB') \cap (DCC') = \emptyset$.

Problema 6. Piramida patrulateră $VABCD$ are baza $ABCD$ situată în planul α (figura 2). a) Câte vârfuri, muchii și fețe are piramida? b) Scrieți relația dintre V și α, dintre AB și α, dintre VA și α. c) Determinați $(VAB) \cap (VBC)$ și $(VAB) \cap \alpha$.

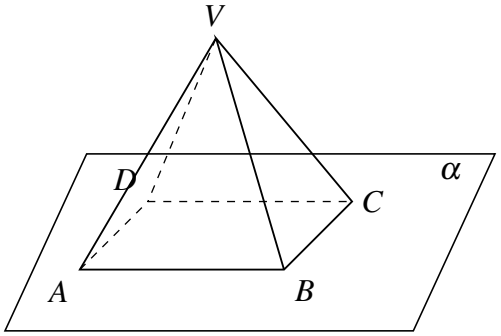


Figura 2: piramida VABCD cu baza în planul α

Rezolvare. a) Vârfurile sunt V, A, B, C, D, deci 5 vârfuri. Muchiile sunt cele 4 muchii ale bazei (AB, BC, CD, DA) și cele 4 muchii laterale (VA, VB, VC, VD), deci 8 muchii. Fețele sunt baza și cele 4 fețe laterale, deci 5 fețe.
b) $V \notin \alpha$; $AB \subset \alpha$ (deoarece $A, B \in \alpha$); $VA \cap \alpha = \{A\}$.
c) Fețele VAB și VBC au în comun muchia VB: $(VAB) \cap (VBC) = VB$. Fața VAB și baza au în comun muchia AB: $(VAB) \cap \alpha = AB$.

Observație. Pentru piramidă, $5 + 5 = 8 + 2$, adică *numărul vârfurilor + numărul fețelor = numărul muchiilor + 2*. Aceeași relație se verifică și la cub: $8 + 6 = 12 + 2$.

III. Reprezentări

Problema 7. Desenați un plan α, o dreaptă $d \subset \alpha$, un punct $P \in d$ și o dreaptă a astfel încât $a \cap \alpha = \{P\}$. Alegeți pe dreapta a un punct $M \notin \alpha$.

Rezolvare.

1. Desenăm planul α ca paralelogram și scriem numele într-un colț.
2. În interiorul paralelogramului desenăm dreapta d și alegem pe ea punctul P.
3. Prin P desenăm dreapta a, aproape verticală. Porțiunea lui a aflată sub plan, acoperită de plan, o desenăm punctat; porțiunea de sub marginea planului se vede din nou, deci o desenăm continuu.
4. Pe porțiunea de deasupra planului alegem punctul M.

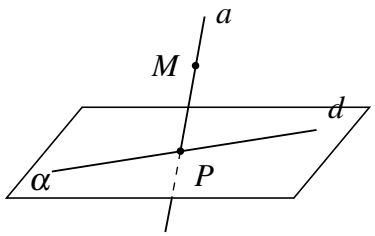


Figura 3: configurația cerută

Problema 8. În figura 4, planele α și β se intersectează după dreapta d, iar punctele A și B sunt situate ca în desen. Scrieți toate relațiile dintre A, B, d, α și β.

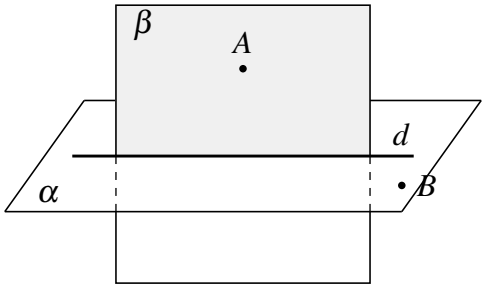


Figura 4: planele α și β, cu $\alpha \cap \beta = d$

Rezolvare. Punctul A este desenat pe planul vertical β, deasupra dreptei d, iar punctul B este desenat pe planul orizontal α, în afara planului β. Rezultă:

$$A \in \beta, \quad A \notin \alpha, \quad A \notin d; \qquad B \in \alpha, \quad B \notin \beta, \quad B \notin d; \qquad d \subset \alpha, \quad d \subset \beta, \quad \alpha \cap \beta = d.$$

IV. Probleme de numărare și de raționament

Problema 9. Câte drepte determină 4 puncte, dacă oricare trei dintre ele sunt necoliniare? Generalizare: câte drepte determină n puncte, oricare trei necoliniare?

Rezolvare. Prin două puncte distincte trece o singură dreaptă. Cu punctele A, B, C, D se formează perechile AB, AC, AD, BC, BD, CD. Deoarece oricare trei puncte sunt necoliniare, nicio dreaptă nu conține trei dintre ele, deci cele 6 drepte sunt distincte: se obțin **6 drepte**.

În general, fiecare dintre cele n puncte se poate uni cu celelalte $n-1$ puncte; obținem $n(n-1)$ perechi, dar fiecare dreaptă a fost numărată de două ori (AB și BA). Numărul dreptelor este

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Problema 10. Se consideră 6 puncte, dintre care exact trei sunt coliniare. Câte drepte determină aceste puncte?

Rezolvare. Dacă oricare trei puncte ar fi necoliniare, am obține $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$ drepte. Cele trei puncte coliniare, să zicem A, B, C, ar da în această numărătoare 3 drepte (AB, AC, BC), dar în realitate determină o singură dreaptă. Prin urmare, numărul dreptelor este $15-3+1 = \mathbf{13}$.

Problema 11. Câte drepte sunt determinate de vârfurile unui paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$?

Rezolvare. Vârfurile sunt 8 puncte, oricare trei necoliniare. Folosind problema 9, se obțin $\frac{8\cdot 7}{2} = 28$ de drepte.

Verificare. Dreptele se împart în trei categorii: cele 12 muchii; diagonalele fețelor, câte 2 pe fiecare dintre cele 6 fețe, deci 12; diagonalele paralelipipedului (AC', BD', CA', DB'), deci 4. Total: $12+12+4 = 28$.

Problema 12. Punctele A și B aparțin planului α, iar punctul C nu aparține planului α. Arătați că: a) punctul C nu aparține dreptei AB; b) dreapta AC are cu planul α un singur punct comun.

Rezolvare. a) Deoarece $A, B \in \alpha$, dreapta AB este inclusă în planul α. Dacă am avea $C \in AB$, ar rezulta $C \in \alpha$, ceea ce contrazice ipoteza. Deci $C \notin AB$.
b) Punctul A este comun dreptei AC și planului α. Dacă dreapta AC ar mai avea un punct comun cu planul, două puncte ale ei ar fi în α, deci toată dreapta ar fi inclusă în α; atunci $C \in \alpha$, contradicție. Rezultă $AC \cap \alpha = \{A\}$.

Bibliografie

[1] *Programa școlară pentru disciplina Matematică, clasele a V-a – a VIII-a*, O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

[2] *Matematică. Manual pentru clasa a VIII-a* — manualele digitale aprobate (edituri: Booklet, Litera, Paralela 45, Intuitext, Corint, CD PRESS, Art Klett, Sigma), `www.manuale.edu.ro`.

Material original; manualele au fost consultate ca surse de documentare.