Prof. Micu Elena
Micu Elena

Lecția 2

Determinarea dreptei, determinarea planului, relații între puncte, drepte și plane

Geometrie în spațiu — clasa a VIII-a — Probleme rezolvate

I. Puncte coplanare și numărul planelor determinate

Problema 1. Arătați că, dacă dintre patru puncte A, B, C, D trei sunt coliniare, atunci cele patru puncte sunt coplanare.

Rezolvare. Presupunem că A, B, C sunt coliniare, situate pe dreapta d. Distingem două cazuri.
– Dacă $D \in d$, toate cele patru puncte sunt pe dreapta d, iar orice plan care conține dreapta d le conține pe toate.
– Dacă $D \notin d$, dreapta d și punctul D determină un plan $\alpha = (d, D)$ (teorema 1). Avem $A, B, C \in d \subset \alpha$ și $D \in \alpha$.
În ambele cazuri, punctele A, B, C, D sunt coplanare.

Problema 2. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. a) Arătați că oricare trei dintre ele sunt necoliniare. b) Câte drepte și câte plane determină cele patru puncte? c) Câte plane determină n puncte, dacă oricare patru dintre ele sunt necoplanare?

Rezolvare. a) Să presupunem, de exemplu, că A, B, C sunt coliniare. Atunci, conform problemei 1, punctele A, B, C, D ar fi coplanare — contradicție cu ipoteza.
b) Orice două puncte determină o dreaptă: AB, AC, AD, BC, BD, CD, deci 6 drepte, distincte deoarece oricare trei puncte sunt necoliniare. Orice trei puncte determină un plan: (ABC), (ABD), (ACD), (BCD). Aceste plane sunt distincte: dacă, de exemplu, $(ABC) = (ABD)$, atunci $D \in (ABC)$, iar punctele ar fi coplanare. Se obțin **4 plane** — planele fețelor tetraedrului $ABCD$.
c) Oricare trei dintre cele n puncte sunt necoliniare (ca la punctul a), deci determină un plan, iar două triplete diferite determină plane diferite (altfel am găsi patru puncte coplanare). Numărul planelor este egal cu numărul tripletelor de puncte. Un triplet se alege în $n(n-1)(n-2)$ moduri dacă ținem cont de ordine, iar fiecare triplet apare de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ ori. Rezultă

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \text{ plane;} \qquad \text{de exemplu, pentru } n = 5 \text{ se obțin } \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10 \text{ plane.}$$

Problema 3. Câte plane determină vârfurile unei piramide patrulatere $VABCD$?

Rezolvare. Vârfurile A, B, C, D ale bazei sunt coplanare, iar V nu aparține planului bazei; oricare trei vârfuri sunt necoliniare. Dacă oricare patru vârfuri ar fi necoplanare, conform problemei 2 am obține 10 plane. Cele patru triplete formate numai cu vârfuri ale bazei (ABC, ABD, ACD, BCD) dau însă un singur plan, planul bazei. Celelalte 6 triplete conțin vârful V și determină planele (VAB), (VBC), (VCD), (VDA), (VAC), (VBD), distincte între ele. Prin urmare, se obțin $10 - 4 + 1 = \mathbf{7}$ plane.

II. Drepte coplanare

Problema 4. Trei drepte distincte a, b, c sunt concurente două câte două, dar nu trec toate prin același punct. Arătați că dreptele sunt coplanare.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro Licență CC BY-NC-ND 4.0

Rezolvare. Fie $a \cap b = \{C\}$, $b \cap c = \{A\}$, $c \cap a = \{B\}$. Punctele A, B, C sunt distincte: de exemplu, dacă $A = B$, acest punct ar fi comun tuturor celor trei drepte. Dreptele concurente a și b determină un plan α (teorema 2). Avem $A \in b \subset \alpha$ și $B \in a \subset \alpha$, deci dreapta c are două puncte distincte, A și B, în planul α. Conform axiomei includerii, $c \subset \alpha$. Așadar a, b, c sunt incluse în planul α.

Observație. Concluzia nu mai este adevărată dacă dreptele trec prin același punct: muchiile AB, AD, AA' ale unui cub sunt concurente în A, dar nu sunt coplanare.

Problema 5. Dreptele a și b sunt paralele, iar dreapta c intersectează dreptele a și b în punctele M, respectiv N. Arătați că dreapta c este inclusă în planul determinat de dreptele a și b.

Rezolvare. Dreptele paralele a și b determină un plan α (teorema 3). Punctele $M \in a$ și $N \in b$ sunt distincte, deoarece a și b nu au puncte comune. Ambele puncte aparțin planului α, deci, conform axiomei includerii, dreapta $c = MN$ este inclusă în α.

Problema 6. Dreptele a și b sunt necoplanare. Pe dreapta a se aleg punctele distincte A și B, iar pe dreapta b punctele distincte C și D. Arătați că dreptele AC și BD sunt necoplanare.

Rezolvare. Presupunem prin reducere la absurd că dreptele AC și BD sunt incluse într-un plan π. Atunci punctele A, B, C, D aparțin planului π. Din $A, B \in \pi$ rezultă $a = AB \subset \pi$, iar din $C, D \in \pi$ rezultă $b = CD \subset \pi$ (axioma includerii). Dreptele a și b ar fi coplanare, ceea ce contrazice ipoteza. Deci AC și BD sunt necoplanare.

III. Intersecții de plane

Problema 7. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ notăm cu O punctul de intersecție a diagonalelor fetei $ABCD$ și cu O' punctul de intersecție a diagonalelor fetei $A'B'C'D'$ (figura 1). Determinați intersecția planelor (ACC') și (BDD').

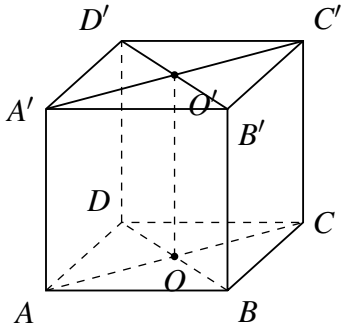

Figura 1: planele diagonale (ACC') și (BDD')

Rezolvare. Punctul O aparține dreptei AC, deci planului (ACC'), și dreptei BD, deci planului (BDD'). Analog, $O' \in A'C' \subset (ACC')$ și $O' \in B'D' \subset (BDD')$. Planele sunt distincte (de exemplu, $B \notin (ACC')$), iar O și O' sunt două puncte distincte comune lor. Două plane secante au în comun exact o dreaptă, așadar

$$(ACC') \cap (BDD') = OO'.$$

Problema 8. Se consideră tetraedrul $ABCD$, punctul M pe muchia AB și punctul N, mijlocul muchiei AC, astfel încât dreptele MN și BC se intersectează în punctul P (figura 2). Determinați: a) $(DMN) \cap (ABC)$; b) $(DMN) \cap (BCD)$; c) $(DMN) \cap (ACD)$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro Licență CC BY-NC-ND 4.0

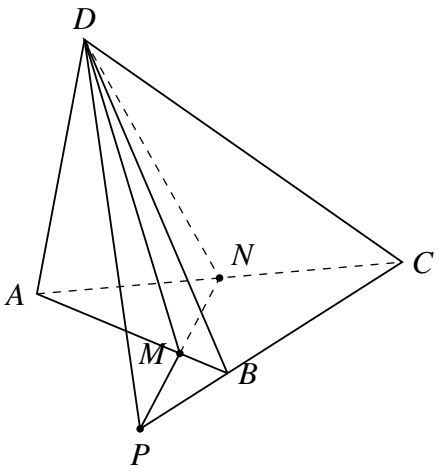

Figura 2: tetraedrul ABCD și planul (DMN)

Rezolvare. a) Punctele M și N aparțin atât planului (DMN), cât și planului (ABC), deoarece $M \in AB$ și $N \in AC$. Planele sunt distincte, pentru că $D \notin (ABC)$. Deci $(DMN) \cap (ABC) = MN$.
b) Punctul D este comun celor două plane. Punctul P aparține dreptei $MN \subset (DMN)$ și dreptei $BC \subset (BCD)$, deci este și el comun. Rezultă $(DMN) \cap (BCD) = DP$.
c) Punctele D și N aparțin ambelor plane ($N \in AC \subset (ACD)$), deci $(DMN) \cap (ACD) = DN$.

Metodă. Pentru a găsi dreapta de intersecție a două plane, căutăm *două puncte comune* acestora; adesea, un punct comun se obține intersectând o dreaptă din primul plan cu o dreaptă din al doilea plan, ambele situate într-un al treilea plan.

Problema 9. Triunghiul ABC nu are niciun punct în planul α, iar dreptele AB, BC și CA intersectează planul α în punctele M, N, respectiv P (figura 3). Arătați că punctele M, N, P sunt coliniare.

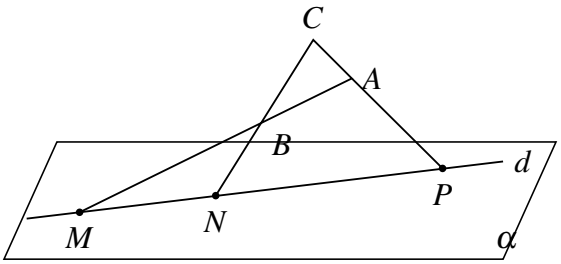

Figura 3: urmele laturilor triunghiului ABC în planul α

Rezolvare. Punctele A, B, C sunt necoliniare, deci determină planul (ABC), diferit de α (deoarece $A \notin \alpha$). Punctul M aparține dreptei $AB \subset (ABC)$ și planului α; analog, N și P aparțin ambelor plane. Planele (ABC) și α sunt distincte și au un punct comun, deci se intersectează după o dreaptă d (axioma intersecției). Toate punctele comune celor două plane se află pe d; în particular, $M, N, P \in d$, adică punctele sunt coliniare.

IV. Poziții relative ale dreptelor și planelor

Problema 10. Planele α și β se intersectează după dreapta d. Fie $A \in \alpha$ și $B \in \beta$ două puncte care nu aparțin dreptei d, iar $C \in d$. Arătați că: a) $A \notin \beta$ și $B \notin \alpha$; b) punctele A, B, C sunt necoliniare; c) $(ABC) \cap \alpha = AC$ și $(ABC) \cap \beta = BC$.

Rezolvare. a) Dacă $A \in \beta$, atunci $A \in \alpha \cap \beta = d$, fals. Analog, $B \notin \alpha$.
b) Dacă A, B, C ar fi coliniare, dreapta AC ar avea două puncte, A și C, în planul α, deci $AC \subset \alpha$ și

$B \in AC \subset \alpha$, ceea ce contrazice punctul a).
c) Punctele A și C sunt comune planelor (ABC) și α, iar planele sunt distincte deoarece $B \notin \alpha$. Deci $(ABC) \cap \alpha = AC$. Analog, B și C sunt comune planelor (ABC) și β, iar $A \notin \beta$, deci $(ABC) \cap \beta = BC$.

Problema 11. Dreapta d intersectează planul α în punctul O. Arătați că orice dreaptă $a \subset \alpha$ care nu trece prin O este necoplanară cu d.

Rezolvare. Presupunem că dreptele a și d sunt incluse într-un plan π. Planul π conține dreapta a și punctul $O \in d$, cu $O \notin a$, deci $\pi = (a, O)$ (teorema 1). Dar și planul α conține dreapta a și punctul O, deci $\pi = \alpha$. Rezultă $d \subset \alpha$, ceea ce contrazice faptul că d are cu α un singur punct comun. Așadar a și d sunt necoplanare.

Observație. Rezultatul oferă o metodă simplă de a recunoaște drepte necoplanare: o dreaptă care „înțeapă" un plan și o dreaptă din acel plan care nu trece prin punctul de intersecție.

Problema 12. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ precizați poziția relativă a dreptelor și justificați: a) AB și DC; b) AC' și $A'C$; c) BB' și $A'C'$; d) AA' și BC.

Rezolvare. a) AB și DC sunt laturi opuse ale pătratului $ABCD$: sunt coplanare și nu au puncte comune, deci sunt **paralele**.
b) Muchiile AA' și CC' sunt paralele și egale, deci $ACC'A'$ este un paralelogram (chiar dreptunghi), iar AC' și $A'C$ sunt diagonalele lui. Dreptele sunt **concurente**, în centrul acestui dreptunghi.
c) Dreapta BB' intersectează planul $(A'B'C')$ numai în punctul B', iar $A'C' \subset (A'B'C')$ nu trece prin B'. Conform problemei 11, dreptele sunt **necoplanare**.
d) Dacă AA' și BC ar fi coplanare, planul lor ar conține punctele necoliniare A, B, C, deci ar fi planul bazei; dar $A' \notin (ABC)$. Dreptele sunt **necoplanare**.

Bibliografie

[1] *Programa școlară pentru disciplina Matematică, clasele a V-a – a VIII-a*, O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

[2] *Matematică. Manual pentru clasa a VIII-a* — manualele digitale aprobate (edituri: Booklet, Litera, Paralela 45, Intuitext, Corint, CD PRESS, Art Klett, Sigma), `www.manuale.edu.ro`.

Material original; manualele au fost consultate ca surse de documentare.