Prof. Micu Elena
Micu Elena

Lecția 2

Determinarea dreptei, determinarea planului, relații între puncte, drepte și plane

Geometrie în spațiu — clasa a VIII-a — Teorie

1. De ce avem nevoie de axiome

În Lecția 1 am văzut că punctul, dreapta și planul sunt noțiuni primare, pe care nu le definim. Pentru a putea raționa cu ele, avem nevoie de câteva „reguli de joc" acceptate fără demonstrație. Aceste reguli se numesc *axiome*. Ele sunt alese astfel încât să corespundă experienței noastre cu obiectele reale și, pornind de la ele, toate celelalte proprietăți se *demonstrează*.

Prezentăm axiomele geometriei în spațiu pe care le vom folosi, împreună cu primele lor consecințe.

2. Determinarea dreptei

Axiomă 1 (axioma dreptei)

Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.

Spunem că două puncte distincte A și B *determină* dreapta AB: există o dreaptă care le conține și ea este unică.

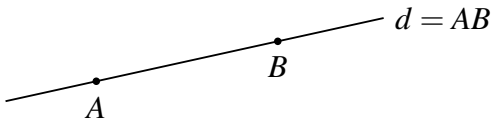

Figura 1: punctele distincte A și B determină dreapta AB

Observație. Din axioma dreptei rezultă că **două drepte distincte au cel mult un punct comun**. Într-adevăr, dacă ar avea două puncte comune distincte, prin aceste două puncte ar trece două drepte diferite, ceea ce contrazice axioma.

Definiție

Trei sau mai multe puncte se numesc *coliniare* dacă există o dreaptă care le conține pe toate. În caz contrar, punctele se numesc *necoliniare*.

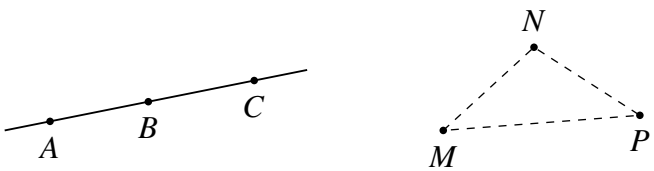

Figura 2: A, B, C coliniare (stânga); M, N, P necoliniare (dreapta)

Două puncte sunt întotdeauna coliniare. Trei puncte necoliniare sunt vârfurile unui triunghi.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro Licență CC BY-NC-ND 4.0

3. Axiomele planului și ale spațiului

Axiomă 2 (axioma planului)

Prin trei puncte necoliniare trece un plan și numai unul. Orice plan conține cel puțin trei puncte necoliniare.

Axiomă 3 (axioma includerii)

Dacă două puncte distincte ale unei drepte aparțin unui plan, atunci întreaga dreaptă este inclusă în acel plan.

Axiomă 4 (axioma intersecției)

Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele au o dreaptă comună, care trece prin acel punct.

Axiomă 5 (axioma spațiului)

Există cel puțin patru puncte care nu aparțin aceluiași plan.

Axiomă 6 (axioma paralelelor)

Printr-un punct exterior unei drepte trece o singură paralelă la acea dreaptă.

Definiție

Patru sau mai multe puncte se numesc *coplanare* dacă există un plan care le conține pe toate; în caz contrar, ele se numesc *necoplanare*. Două drepte se numesc *coplanare* dacă există un plan care le conține pe amândouă.

Axioma spațiului ne spune că „spațiul nu este un plan”: există puncte necoplanare. Patru puncte necoplanare A, B, C, D sunt vârfurile unui *tetraedru*.

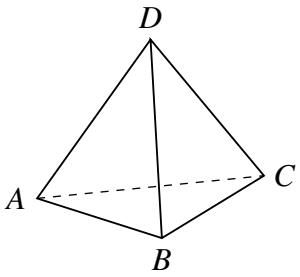

Figura 3: patru puncte necoplanare — tetraedrul ABCD

Observație. Din axioma intersecției rezultă că două plane distincte fie nu au niciun punct comun, fie au în comun *exact o dreaptă*. Ele nu pot avea în comun trei puncte necoliniare, deoarece atunci, conform axiomei planului, ar coincide.

4. Determinarea planului

Spunem că o figură *determină* un plan dacă există un plan care o conține și acest plan este unic. Axioma planului oferă primul mod de determinare; din ea deducem încă trei.

a) Trei puncte necoliniare

Trei puncte necoliniare A, B, C determină un plan, notat (ABC) (axioma planului).

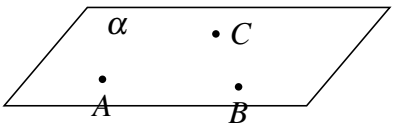

Figura 4: $\alpha = (ABC)$

b) O dreaptă și un punct exterior ei

Teoremă 1
O dreaptă și un punct care nu aparține dreptei determină un plan.

Demonstrație. Fie dreapta d și punctul $A \notin d$. Alegem pe d două puncte distincte B și C. Punctele A, B, C sunt necoliniare: dacă ar fi coliniare, A ar aparține dreptei BC, adică dreptei d, fals. Conform axiomei planului, există un singur plan $\alpha = (ABC)$. Deoarece $B, C \in \alpha$, din axioma includerii rezultă $d \subset \alpha$; deci α conține și dreapta d, și punctul A.

Unicitatea: orice plan care conține pe d și pe A conține punctele necoliniare A, B, C, deci coincide cu (ABC). □

Planul determinat de dreapta d și punctul A se notează (d,A).

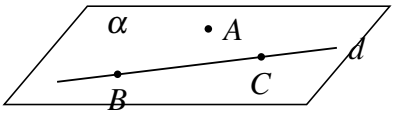

Figura 5: $\alpha = (d,A)$

c) Două drepte concurente

Teoremă 2
Două drepte concurente determină un plan.

Demonstrație. Fie dreptele a și b, cu $a \cap b = \{O\}$. Alegem un punct $B \in b$, $B \neq O$. Atunci $B \notin a$ (altfel dreptele ar avea două puncte comune, O și B, deci ar coincide). Conform teoremei 1, dreapta a și punctul B determină un plan α. Punctele O și B ale dreptei b sunt în α, deci $b \subset \alpha$ (axioma includerii). Planul α conține ambele drepte; el este unic, pentru că orice plan care le conține pe a și b conține dreapta a și punctul B. □

d) Două drepte paralele

Definiție
Două drepte se numesc *paralele* dacă sunt coplanare și nu au niciun punct comun. Scriem $a \parallel b$.

Teoremă 3
Două drepte paralele determină un plan.

Demonstrație. Dacă $a \parallel b$, prin definiție există un plan α care le conține pe amândouă. Pentru unicitate, alegem un punct $B \in b$; avem $B \notin a$. Orice plan care conține pe a și b conține dreapta a și punctul B, deci coincide cu planul (a,B), unic conform teoremei 1. □

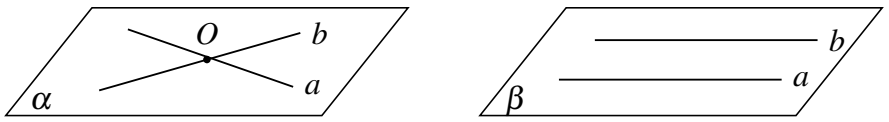

Figura 6: plan determinat de drepte concurente (stânga) și de drepte paralele (dreapta)

Rețineți
Un plan este determinat de: (1) trei puncte necoliniare; (2) o dreaptă și un punct exterior ei; (3) două drepte concurente; (4) două drepte paralele.

Observație. Exemple din viața de zi cu zi: un tablou sprijinit pe două cuie se poate roti în jurul dreptei care trece prin ele, dar sprijinit pe trei cuie care nu sunt în linie dreaptă stă fix — trei puncte necoliniare determină planul tabloului. Când deschidem o carte, cotorul (o dreaptă) și colțul unei pagini (un punct exterior cotorului) determină planul acelei pagini.

5. Poziții relative a două drepte

Fie două drepte distincte a și b. Ele pot fi:

- *coplanare*: atunci sunt fie **concurente** (au un singur punct comun), fie **paralele** (nu au puncte comune);
- *necoplanare*: nu există niciun plan care să le conțină pe amândouă; în acest caz, dreptele nu se intersectează și totuși nu sunt paralele.

Observație. În spațiu, faptul că două drepte nu au puncte comune **nu** înseamnă că sunt paralele. De exemplu, în cubul $ABCDA'B'C'D'$, dreptele AB și CC' nu au puncte comune și nu sunt paralele: ele sunt necoplanare.

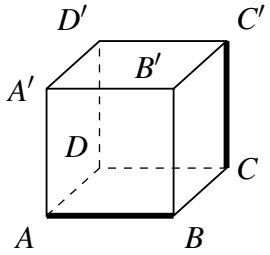

Figura 7: dreptele AB și CC′ sunt necoplanare

Justificare. Dacă AB și CC' ar fi într-un același plan, acesta ar conține punctele necoliniare A, B, C, deci ar fi planul bazei (ABC). Dar $C' \notin (ABC)$, contradicție.

Poziția	**Puncte comune**	**Exemplu în cubul** $ABCDA'B'C'D'$
concurente	un singur punct	AB și BC ($AB \cap BC = \{B\}$)
paralele	niciun punct, coplanare	AB și DC; AA' și CC'
necoplanare	niciun punct, necoplanare	AB și CC'; AD și BB'

6. Poziții relative ale unei drepte față de un plan și a două plane

Folosind axiomele, putem justifica pozițiile pe care le-am descris intuitiv în Lecția 1.

Dreaptă și plan. O dreaptă d și un plan α pot avea:

- cel puțin două puncte comune; atunci, conform axiomei includerii, $d \subset \alpha$;
- exact un punct comun; spunem că dreapta este *secantă* planului: $d \cap \alpha = \{P\}$;
- niciun punct comun; spunem că dreapta este *paralelă cu planul*: $d \parallel \alpha$.

Două plane. Două plane α și β pot fi:

- *confundate*, dacă au în comun trei puncte necoliniare (axioma planului);
- *secante*, dacă sunt distincte și au un punct comun; atunci se intersectează după o dreaptă (axioma intersecției): $\alpha \cap \beta = d$;
- *paralele*, dacă nu au niciun punct comun: $\alpha \parallel \beta$.

Dreptele și planele paralele vor fi studiate în detaliu în lecțiile următoare.

7. Sinteză

Rețineți

- Două puncte distincte determină o dreaptă; două drepte distincte au cel mult un punct comun.
- Un plan este determinat de trei puncte necoliniare, de o dreaptă și un punct exterior, de două drepte concurente sau de două drepte paralele.
- Dacă două puncte ale unei drepte sunt într-un plan, toată dreapta este în acel plan.
- Două plane distincte cu un punct comun se intersectează după o dreaptă.
- Două drepte din spațiu pot fi concurente, paralele sau necoplanare.

Bibliografie

[1] *Programa școlară pentru disciplina Matematică, clasele a V-a – a VIII-a*, O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

[2] *Matematică. Manual pentru clasa a VIII-a* — manualele digitale aprobate (edituri: Booklet, Litera, Paralela 45, Intuitext, Corint, CD PRESS, Art Klett, Sigma), `www.manuale.edu.ro`.

Material original; manualele au fost consultate ca surse de documentare.